Università degli Studi Mediterranea di Reggio Calabria

Dipartimento di Informatica, Matematica, Elettronica e Trasporti

**Dottorato di Ricerca in Ingegneria dei Trasporti**
XVII ciclo

# Progetto dell'Offerta dei Sistemi di Trasporto Stradale Urbano

Coordinatore:
*prof. ing. Francesco Russo*

Dottorando:
*dott. ing. Giuseppe Pavone*

Tutor:
*prof. ing. Antonino Vitetta*

# Indice

**Introduzione** ..... **VII**

**CAPITOLO 1 Simulazione dei sistemi di trasporto** ..... **1**

**1.1. Modelli** ..... **2**
1.1.1. Identificazione di un sistema di trasporto ..... 2
1.1.2. Modelli di offerta ..... 3
1.1.3. Modelli di domanda ..... 7
1.1.3.1. Teoria dell'utilità aleatoria ..... 7
1.1.3.2. Struttura e proprietà generali dei modelli di domanda di trasporto ..... 12
1.1.4. Modelli di assegnazione ..... 18
1.1.4.1. Assegnazione di carico deterministico della rete (DNL) ..... 20
1.1.4.2. Assegnazione di carico stocastico della rete (SNL) ..... 22
1.1.4.3. Assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti (DUE) ..... 24
1.1.4.4. Assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti (SUE) ..... 25
1.1.4.5. Assegnazione deterministica di ottimo di sistema (DSO) ..... 26
1.1.4.6. Assegnazione stocastica di ottimo di sistema (SSO) ..... 27
**1.2. Algoritmi** ..... **29**
1.2.1. Algoritmi per la ricerca dei minimi percorsi ..... 29
1.2.2. Algoritmi di assegnazione di carico deterministico della rete (DNL) ..... 32
1.2.3. Algoritmi di assegnazione di carico stocastico della rete (SNL) ..... 35
1.2.3.1. Modello di scelta del percorso Probit ..... 35
1.2.3.2. Modello di scelta del percorso Logit ..... 36
1.2.4. Algoritmi di assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti (DUE) ..... 39
1.2.5. Algoritmi di assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti (SUE) ..... 40

**CAPITOLO 2 Progetto dei sistemi di trasporto** ..... **41**

**2.1. Modelli** ..... **43**
2.1.1. Classificazione dei modelli di progetto ..... 43
2.1.1.1. Variabili decisionali ..... 43
2.1.1.2. Obiettivi ..... 46
2.1.1.3. Vincoli ..... 48
2.1.2. Applicazione alla pianificazione dei sistemi di trasporto ..... 51
2.1.3. Formulazione generale dei modelli di progetto ..... 53
2.1.4. Esempi di formulazioni di modelli di progetto ..... 56
**2.2. Algoritmi** ..... **59**
2.2.1. Algoritmi per modelli con variabili decisionali continue ..... 59
2.2.2. Algoritmi per modelli con variabili intere ..... 60

**CAPITOLO 3 Modelli di progetto proposti ..... 63**

**3.1. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: regolazione semaforica ..... 65**

**3.2. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: topologia e regolazione semaforica ..... 69**

**CAPITOLO 4 Algoritmi di progetto proposti ..... 73**

**4.1. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: regolazione semaforica ..... 75**
4.1.1. Struttura generale dell'algoritmo ..... 75
4.1.2. Direzione di ricerca ..... 77
4.1.3. Matrici delle probabilità congiunte e matrici dei flussi congiunti ..... 79
4.1.4. Applicazioni delle matrici dei flussi congiunti ..... 81

**4.2. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: topologia e regolazione semaforica ..... 84**
4.2.1. Struttura generale dell'algoritmo ..... 84
4.2.2. Fase di progetto della topologia ..... 85
4.2.2.1. Hill Climbing (HC) ..... 88
4.2.2.2. Simulated Annealing (SA) ..... 89
4.2.2.3. Tabu Search (TS) ..... 90
4.2.2.4. Genetic Algorithms (GA) ..... 92
4.2.2.5. Metodo ibrido 1: Tabu Search + Genetic Algorithms (TS+GA) ..... 94
4.2.2.6. Metodo ibrido 2: Tabu Search + Path Relinking (TS+PR) ..... 95
4.2.2.7. Hill Climbing con intorno doppio (HC2) ..... 98
4.2.3. Fase di progetto della regolazione semaforica ..... 98

**CAPITOLO 5 Sperimentazioni ..... 101**

**5.1. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: regolazione semaforica ..... 103**

**5.2. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: topologia e regolazione semaforica ..... 109**
5.2.1. Calibrazione dei parametri ..... 110
5.2.1.1. Sistemi di trasporto utilizzati ..... 110
5.2.1.2. Risultati delle calibrazioni ..... 112
5.2.1.2.1. Hill Climbing (HC) ..... 112
5.2.1.2.2. Simulated Annealing (SA) ..... 112
5.2.1.2.3. Tabu Search (TS) ..... 113
5.2.1.2.4. Genetic Algorithms (GA) ..... 114
5.2.1.2.5. Metodo ibrido 1 (TS+GA) ..... 115
5.2.1.2.6. Metodo ibrido 2 (TS+PR) ..... 116
5.2.1.2.7. Hill Climbing con intorno doppio (HC2) ..... 116
5.2.1.2.8. Confronto fra i risultati ottenuti ..... 117
5.2.2. Analisi e confronto delle soluzioni ..... 119
5.2.2.1. Sistema di trasporto utilizzato ..... 119
5.2.2.2. Analisi dei risultati ..... 122
5.2.2.2.1. Confronto dei risultati ottenuti al variare dell'algoritmo ..... 123
5.2.2.2.2. Confronto della velocità di convergenza al variare dell'algoritmo ..... 124
5.2.2.2.3. Analisi multicriteria ..... 125
5.2.3. Confronto col Piano Urbano del Traffico ..... 127
5.2.3.1. Obiettivi e proposte del Piano Urbano del Traffico ..... 128
5.2.3.2. Confronto fra le soluzioni del Piano e quelle ottenute con i metodi proposti ..... 130

**CAPITOLO 6 Conclusioni ..... 133**

**6.1. Obiettivi raggiunti ..... 134**

**6.2. Sviluppi** ..... **136**

**APPENDICE A Algoritmi per l'ottimizzazione combinatoria** ..... **137**

**A.1. Complessità computazionale e problemi combinatori** ..... **138**
A.1.1. Complessità asintotica ..... 139
A.1.2. Problemi trattabili ed intrattabili ..... 139
**A.2. Algoritmi esatti** ..... **142**
**A.3. Metaeuristiche** ..... **143**
A.3.1. Aspetti generali e classificazione delle metaeuristiche ..... 144
A.3.2. Descrizione di alcune metaeuristiche ..... 145
A.3.2.1. Hill Climbing ..... 145
A.3.2.2. Simulated Annealing ..... 145
A.3.2.3. Tabu Search ..... 146
A.3.2.4. Genetic Algorithms ..... 146

**Riferimenti bibliografici** ..... **149**

**Indice analitico** ..... **157**

**Indice delle figure** ..... **161**

**Indice delle tabelle** ..... **163**

**Notazione** ..... **165**

# Introduzione

Il *sistema delle attività* sociali, economiche e culturali di ogni civiltà ha da sempre avuto una stretta connessione con il *sistema di trasporto*. Basti pensare che lo sviluppo di questi due sistemi è sempre andato di pari passo, e che qualsiasi ipotesi fantascientifica sul futuro è sempre associata ad un innovativo sistema di trasporto.

Per simulare un sistema di trasporto, data la sua complessità, non è possibile ricorrere a metodi qualitativi, ma è necessario utilizzare dei modelli quantitativi che costituiscono l'oggetto di studio dell'*ingegneria dei sistemi di trasporto*. Lo scopo di questa disciplina non si limita alla simulazione del funzionamento attuale di un sistema di trasporto, cosa che avrebbe scarso interesse dal punto di vista ingegneristico. Essa si serve di tale strumento per la simulazione di scenari futuri di progetto, consentendo di valutare l'effetto degli interventi prima che essi siano realizzati, consentendo così di ottimizzare le risorse impiegate. È inoltre possibile non solo simulare degli scenari di intervento definiti a priori, ma anche utilizzare metodi che suggeriscono gli interventi migliori da attuare sul sistema di trasporto. Il *progetto dei sistemi di trasporto* potrebbe essere visto come il fine dell'ingegneria dei sistemi di trasporto.

Oggetto di tale studio è la proposta e la sperimentazione di modelli e algoritmi risolutivi per il progetto dei sistemi di trasporto. In particolare l'ambito al quale si fa riferimento sono i *sistemi di trasporto stradale urbano*. Tale ambito è sicuramente emblematico poiché il controllo del traffico urbano costituisce una sfida importante, dal momento che perderla equivarrebbe ad ammettere l'inadeguatezza della società moderna basata sulla concentrazione delle attività in aree urbane.

I sistemi di trasporto stradale urbano negli ultimi decenni sono andati incontro a notevoli problemi dovuti all'incremento della domanda di trasporto che spesso non è stato adeguatamente bilanciato da un corrispondente aumento dell'offerta di infrastrutture e servizi. Ne sono derivati effetti ambientali e diseconomie produttive che sempre più hanno finito col caratterizzare negativamente sia la qualità della vita che le stesse ulteriori possibilità di sviluppo e vitalità del tessuto urbano, fino a mettere spesso in crisi il modello stesso di civiltà urbana.

Negli ultimi anni, sotto la spinta di pressanti esigenze, si è diffusa sia nell'opinione generale che a livello degli stessi responsabili politici ed amministrativi una nuova cultura di pianificazione dei servizi urbani ed in particolare, per quanto riguarda l'ambito di interesse degli ingegneria dei trasporti, l'esigenza di una corretta progettazione dei sistemi di trasporto. Dopo anni in cui tutto è stato lasciato ad interventi su singoli elementi considerati non interagenti con l'intero sistema, adesso ci si rende conto dell'importanza del progetto degli elementi di una rete di trasporto, intesa come sistema, integrando il punto di vista della progettazione del singolo elemento infrastrutturale.

In questo studio sono stati proposti e sperimentati alcuni modelli e algoritmi risolutivi di tipo quantitativo per il problema di progetto dei sistemi di trasporto stradale urbano. I modelli proposti considerano come elementi da progettare la *topologia della rete* (cioè i sensi di marcia delle corsie) e la *regolazione semaforica* delle intersezioni. Data la notevole difficoltà nel risolvere i problemi affrontati, i metodi risolutivi proposti consistono in *algoritmi euristici*, che non garantiscono l'individuazione di una soluzione esatta ma spesso consentono di ottenerne un'approssimazione in tempi ragionevoli. Per valutare l'efficienza e l'efficacia degli algoritmi proposti, essi sono stati testati su sistemi di trasporto test e su sistemi reali. Ciò ha consentito di confrontare i metodi fra loro e con gli approcci correntemente utilizzati nella pratica professionale

La filosofia di fondo utilizzata in questo studio è quella di impiegare metodi che siano direttamente ed efficacemente applicabili alle tipiche realtà urbane. Al contrario in letteratura spesso si osserva che l'applicabilità pratica è spesso sacrificata, adeguando la formulazione del modello di progetto per favorire l'efficienza degli algoritmi risolutivi proposti. In altri termini qui si è interessati ad una soluzione ingegneristica e non prevalentemente matematica del problema. Proprio questo aspetto deve essere considerato l'elemento innovativo più interessante di questo studio rispetto allo stato dell'arte. Devono inoltre essere considerati innovativi i metodi risolutivi proposti e l'attenzione con la quale essi sono stati sperimentati su sistemi di trasporto reali, deducendo importanti considerazioni e regole pratiche.

La trattazione è suddivisa in sei capitoli:

1. *Simulazione dei sistemi di trasporto*, che descrive i modelli e gli algoritmi presenti in letteratura con i quali è possibile simulare un sistema di trasporto, con particolare riferimento alla simulazione di un sistema di trasporto stradale urbano;
2. *Progetto dei sistemi di trasporto*, che descrive i modelli e gli algoritmi presenti in letteratura con i quali è possibile progettare l'offerta di un sistema di trasporto, con particolare riferimento al progetto di un sistema di trasporto stradale urbano;
3. *Modelli di progetto proposti*, che descrive i modelli proposti per il progetto dell'offerta di un sistema di trasporto stradale urbano;
4. *Algoritmi di progetto proposti*, che descrive gli algoritmi proposti per risolvere i modelli introdotti nel capitolo precedente;
5. *Sperimentazioni*, che riporta i risultati delle sperimentazioni su sistemi di trasporto test e su sistemi reali, permettendo di valutare i metodi risolutivi proposti confrontandoli fra loro e con gli approcci correntemente utilizzati nella pratica professionale;
6. *Conclusioni*, nel quale sono sintetizzati e valutati i principali obiettivi raggiunti e sono delineati alcuni possibili sviluppi della ricerca.

È inoltre presente un'appendice sugli *Algoritmi per l'ottimizzazione combinatoria*, che per comodità del lettore sintetizza alcuni argomenti di ricerca operativa utili per la comprensione di alcuni degli algoritmi proposti nel quarto capitolo.

I primi due capitoli sono essenzialmente una breve trattazione sullo stato dell'arte, benché siano presenti alcuni contributi originali; inoltre essi introducono buona parte delle definizioni e della notazione utilizzata nel seguito. Invece i restanti capitoli riportano i principali risultati del lavoro di ricerca.

Il lettore con una buona conoscenza dell'Ingegneria dei Sistemi di Trasporto interessato a conoscere i risultati del lavoro di ricerca svolto può affrontare la lettura a partire dal terzo capitolo (o dal secondo se desidera approfondire alcuni argomenti inerenti il progetto dei sistemi di trasporto). Chi volesse affrontare questo percorso di lettura ridotto si può servire di un elenco della notazione e di un indice analitico, che richiama in particolare gli argomenti trattati nei primi due capitoli.

Si ringrazia il prof. A. Vitetta che ha svolto un ruolo fondamentale nell'ambito di questa ricerca, contribuendo ad essa in modo continuo e determinante ed inoltre curando la formazione scientifica dello scrivente.

Si ringraziano i membri della commissione del Dottorato di Ricerca per i preziosi consigli, ed in particolare il presidente prof. F. Russo, che ha periodicamente verificato gli stati di avanzamento di questo lavoro, e il prof. G.E. Cantarella, che ha contribuito in maniera decisiva a definire gli obiettivi della ricerca.

Si ringraziano inoltre il C.I.Su.T., che ha fornito i dati relativi ad alcuni dei sistemi di trasporto utilizzati all'interno di questo studio, il prof. P. Legato, che ha contribuito all'approfondimento e allo sviluppo di alcuni argomenti nell'ambito della ricerca operativa, i proff. N. Papola, H. Mahamassani e alcuni anonimi referee per i suggerimenti forniti che hanno contribuito a migliorare alcuni aspetti di questo studio.

Infine si ringraziano tutti i membri del L.A.S.T. (Laboratorio di Analisi dei Sistemi di Trasporto), all'interno del quale questa ricerca è stata effettuata.

# CAPITOLO 1
# Simulazione dei sistemi di trasporto

Un *sistema di trasporto* può essere definito come "la combinazione di elementi e delle loro interazioni, che producono la domanda di trasporto all'interno di una data area e i servizi di offerta di trasporto per soddisfare questa domanda" [26]. Tale definizione è abbastanza generale, e può essere applicata in differenti contesti.

Da un punto di vista applicativo per simulare un sistema di trasporto è necessario isolarne gli elementi più importanti e considerare le interazioni più rilevanti, dal momento che è impossibile tenere in considerazione tutti gli elementi interagenti fra loro. In altri termini, come per tutte le discipline ricadenti nell'ambito dell'ingegneria, è necessario costruire un modello semplificato di quella che è la complessa realtà. Tale modello semplificato deve garantire il giusto compromesso fra la capacità simulare il fenomeno in maniera sufficientemente aderente alla realtà e la trattabilità teorica e computazionale del modello stesso, considerate le conoscenze e gli strumenti a disposizione dell'analista.

Benché la data di nascita dell'ingegneria dei sistemi di trasporto si può fare risalire agli anni cinquanta del secolo scorso (ed in particolare al 1952, anno in cui John Glen Wardrop scrisse "Some theoretical aspects of road traffic research" [111]) le prime trattazioni sistematiche relative alla simulazione di un sistema di trasporto risalgono agli anni settanta [90], e si susseguono negli anni ottanta [76, 95] e novanta [80, 25], fino agli anni più recenti [26] con aggiornamenti, essendo tale disciplina tuttora in continua evoluzione.

Questo capitolo descrive i modelli (paragrafo 1.1) e gli algoritmi (paragrafo 1.2) con i quali è possibile simulare un sistema di trasporto. La descrizione riportata è sintetica ed alcuni aspetti sono solo accennati, non per la loro minore importanza ai fini della simulazione di un sistema di trasporto, ma perché il contenuto di questo capitolo è focalizzato sugli aspetti che saranno più utili nel prosieguo della trattazione. In particolare la descrizione è riferita alla simulazione di un sistema di trasporto stradale urbano.

Il contenuto di questo capitolo può essere approfondito e compreso in maniera certamente migliore per mezzo dei più recenti fra i riferimenti sopra citati (in particolare [26]). Tuttavia va tenuto presente che nessuno di questi riferimenti tratta tutti gli argomenti che sono descritti in questo capitolo.

## 1.1. Modelli

Un sistema di trasporto è costituito da due parti che interagiscono fra loro: l'offerta e la domanda.

L'*offerta* è costituita dalle componenti fisiche ed organizzative finalizzate alla produzione dei servizi di trasporto in una determinata area. Per simulare un sistema di trasporto è necessario riprodurre il modo in cui il livello di servizio offerto da tali componenti è influenzato dagli utenti che se ne servono. L'approccio più diffuso per simulare l'offerta di trasporto si avvale delle reti, che sono costituite da grafi, con i quali è possibile rappresentare la struttura topologica dell'offerta, e funzioni di costo associate agli archi, con le quali si simulano le prestazioni del sistema.

La *domanda* è costituita dall'insieme dei viaggiatori e delle merci con determinate caratteristiche che si spostano in una determinata area in un intervallo di tempo. Essa è simulata attraverso opportuni modelli che possono essere visti come una relazione matematica che fornisce il valore medio del flusso di domanda in un determinato periodo di riferimento con le sue caratteristiche rilevanti, dati il sistema delle attività insediate nel territorio e l'offerta di trasporto.

Il funzionamento di un sistema di trasporto dipende dall'*interazione domanda-offerta*: da una parte le prestazioni del sistema di offerta possono essere influenzate dalla domanda, e dall'altra le scelte di viaggio, e di conseguenza i flussi di traffico, dipendono dalle caratteristiche dell'offerta. Tale fenomeno è simulato attraverso modelli che si differenziano a seconda di alcune ipotesi, fra le quali: la scelta del percorso da parte degli utenti (che può essere simulata con modelli deterministici o stocastici), l'influenza sul livello di servizio di un dato componente dell'offerta degli utenti che si servono del componente stesso.

Nel paragrafo 1.1.1 è descritto il modo in cui un sistema di trasporto è identificato e come esso è messo in relazione con l'ambiente esterno. Nel paragrafo 1.1.2 sono trattati i modelli di offerta. Nel paragrafo 1.1.3 sono trattati i modelli di domanda. Nel paragrafo 1.1.4 sono trattati i modelli di assegnazione, che simulano l'interazione fra i sistemi di domanda e di offerta.

### 1.1.1. Identificazione di un sistema di trasporto

Per progettare un sistema di trasporto è necessario simularne il funzionamento all'interno di un'area geografica nella quale si ritiene che si esauriscano la parte rilevante degli effetti degli interventi progettati. Tale area prende il nome di *area di studio*, ed il suo confine è detto *cordone*. L'area di studio è suddivisa in più *zone di traffico*, che possono consistere in intere città o province per analisi di sistemi a scala nazionale oppure in pochi isolati per analisi di sistemi a scala urbana. Per ciascuna zona di traffico si suppone che tutti gli spostamenti interzonali siano concentrati in un punto detto *centroide di zona* o *centroide interno*, mentre gli spostamenti intrazonali vengono trascurati. Tutto ciò che è esterno all'area di studio interessa esclusivamente per quanto riguarda le interconnessioni con il sistema analizzato, ed a tal fine si considerano alcuni punti, detti *centroidi esterni*, nei quali si suppongono concentrati gli spostamenti di scambio fra l'area di studio e l'esterno e gli

spostamenti di attraversamento dell'area di studio. Un esempio del risultato del processo di identificazione dell'area di studio e della suddivisione in zone di traffico è riportato nella Fig. 1.1.

Si introduce la seguente notazione:

- r centroide (zona) origine dello spostamento;
- R insieme dei centroidi origine;
- s centroide (zona) destinazione dello spostamento;
- S insieme dei centroidi destinazione;
- rs coppia origine-destinazione;
- RS insieme delle coppie origine-destinazione.

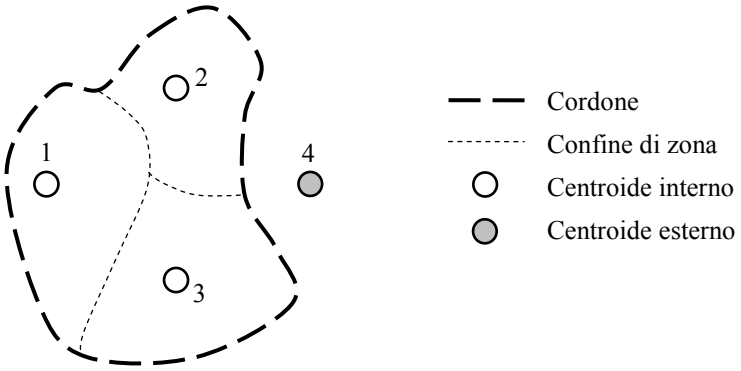



**Fig. 1.1 – Esempio di identificazione dell'area di studio e suddivisione in zone di traffico**

## 1.1.2. Modelli di offerta

Un modello di offerta simula il livello di servizio, cioè le prestazioni, associate alle componenti fisiche ed organizzative finalizzate alla produzione dei servizi di trasporto in funzione delle caratteristiche di tali componenti ed eventualmente del numero di utenti che se ne servono. L'influenza del numero di utenti sul livello di servizio costituisce un fenomeno che è detto *congestione*. La descrizione fornita in questo paragrafo è adeguata alla simulazione di un sistema di trasporto stradale, mentre per la simulazione di sistemi di trasporto collettivo si rimanda alla letteratura esistente [78, 79].

La costruzione di un modello di offerta può essere ottenuta utilizzando diversi approcci. Un possibile approccio consiste nel costruire una base dati, i cui dati sono elaborati in modo analitico per ottenere le prestazioni del sistema [91]. Un altro possibile approccio, di gran lunga più utilizzato in letteratura (fra i numerosi riferimenti [26, 76, 80, 90, 95]) ed utilizzato nell'ambito di questo studio, consiste nella rappresentazione dell'offerta per mezzo di una *rete*, cioè di un grafo orientato ai cui archi sono associate delle funzioni di costo. Il *grafo*, cui è associata la configurazione topologica del sistema di trasporto, è costituito da nodi e archi e sarà indicato col simbolo G. Più in dettaglio i componenti di un grafo sono:

- *archi reali*, che rappresentano le infrastrutture viarie rilevanti (cioè quelle che sono destinate prevalentemente agli spostamenti interzonali);
- *nodi reali*, che rappresentano le intersezioni fra le infrastrutture viarie o punti nei quali si modificano significativamente le caratteristiche delle infrastrutture;

- centroidi interni ed esterni, definiti in precedenza, che costituiscono nodi del grafo;
- *archi fittizi*, che collegano i centroidi alla rete reale (cioè il sottografo costituito da archi e nodi reali);
- *nodi fittizi*, che costituiscono punti di connessione fra gli archi fittizi e la rete reale.

Ad ogni arco è associato un *flusso di arco*, cioè il numero di utenti (o veicoli) che lo attraversa nell'unità di tempo, ed un *costo di arco* che ogni utente deve sostenere per attraversarlo. Ogni utente per raggiungere dalla propria origine la destinazione prescelta ha a disposizioni un insieme di *percorsi*, cioè una sequenza di archi che ha come nodo iniziale il centroide origine e come nodo finale il centroide destinazione, a ciascuno dei quali può essere associato un *flusso di percorso* ed un *costo di percorso*, che si compone di due aliquote: *costo di percorso additivo*, che è dato dalla somma dei costi di arco che compongono il percorso, e *costo di percorso non additivo* che è specifico del percorso. I costi possono tenere conto di differenti disutilità (tempo di viaggio, costo monetario, trasbordi, ecc.) opportunamente pesate fra loro, ma per quanto riguarda gli spostamenti con mezzi di trasporto individuale in ambito urbano è usuale considerare esclusivamente il tempo di viaggio (in assenza di costi monetari dovuti a pedaggi o alla sosta).

Si introduce la seguente notazione:

- n generico nodo;
- N insieme dei nodi;
- l generico arco (talvolta indicato con la coppia di nodi iniziale e finale n'n");
- L insieme degli archi;
- $f_l$ flusso di arco relativo all'arco l;
- **f** vettore dei flussi di arco, che è costituito da tanti elementi quanti sono gli archi della rete;
- $c_l$ costo di arco relativo all'arco l;
- **c** vettore dei costi di arco, che è costituito da tanti elementi quanti sono gli archi della rete;
- k generico percorso;
- K insieme dei percorsi;
- $K_{rs}$ insieme dei percorsi relativi alla coppia origine-destinazione rs;
- $h_k$ flusso di percorso relativo al percorso k;
- **h** vettore dei flussi di percorso, che è costituito da tanti elementi quanti sono i percorsi della rete;
- $\mathbf{h}_{rs}$ vettore dei flussi dei percorsi relativi alla coppia rs, che è costituito da tanti elementi quanti sono i percorsi della rete che connettono l'origine r alla destinazione s;
- $g_k$ costo di percorso relativo al percorso k;
- **g** vettore dei costi di percorso, che è costituito da tanti elementi quanti sono i percorsi della rete;
- $\mathbf{g}^{NA}$ vettore dei costi di percorso additivi (cioè costituiti dalla somma dei costi degli archi che compongono il percorso), che è costituito da tanti elementi quanti sono i percorsi della rete;
- $\mathbf{g}^{ADD}$ vettore dei costi di percorso non additivi (cioè associati direttamente al percorso), che è costituito da tanti elementi quanti sono i percorsi della rete;

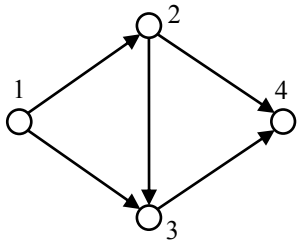
- $\mathbf{g}_{rs}$ vettore dei costi dei percorsi relativi alla coppia rs, che è costituito da tanti elementi quanti sono i percorsi della rete che connettono l'origine r alla destinazione s.

Le grandezze di arco, flussi e costi, possono essere messe in relazione alle corrispondenti quantità riferite ai percorsi, mediante una *matrice di incidenza archi percorsi*, indicata col simbolo $\boldsymbol{\Delta}$. Ad ogni riga di tale matrice è associato un arco l della rete, mentre ad ogni colonna è associato un percorso k; un generico elemento $\delta_{lk}$ della matrice può assumere i valori 0 oppure 1, che stanno ad indicare rispettivamente la non appartenenza e l'appartenenza dell'arco l al percorso k. Nella Fig. 1.2 sono riportate una rete di esempio e la corrispondente matrice di incidenza. Grazie a tale matrice è possibile introdurre delle relazioni fra i flussi di arco e di percorso

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{h} \tag{1.1}$$

e fra i costi di arco e di percorso

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{ADD} + \mathbf{g}^{NA} = \boldsymbol{\Delta}^{T}\mathbf{c} + \mathbf{g}^{NA} \tag{1.2}$$




| | |
|---|---|
| Nodi | N ≡ {1, 2, 3, 4} |
| Archi | L ≡ {(1, 2); (1, 3); (2, 3); (2, 4); (3, 4)} |
| Centroidi origine | R ≡ {1, 2, 3} |
| Centroidi destinazione | S ≡ {3, 4} |

Matrice d'incidenza archi-percorsi

| Coppia origine-destinazione | | 1-3 | 1-4 | | | 2-3 | 2-4 | | 3-4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Percorsi* / *Archi* | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | | | | | | | | | |
| 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 |  | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**Fig. 1.2 – Esempio di rete e di matrice di incidenza archi-percorsi**[1]

I flussi e i costi di arco possono essere fra loro indipendenti (rete non congestionata) oppure messi in relazione fra loro (rete congestionata) per mezzo delle cosiddette *funzioni di costo* $\boldsymbol{c}(\bullet)$

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{c}(\mathbf{f}) \tag{1.3}$$

[1] Al fine di semplificare la rete sono stati omessi gli archi fittizi che dovrebbero collegare i centroidi alla rete reale.

che si dicono *separabili* se per ogni arco *l* il costo dipende solo dal flusso sull'arco stesso

$$c_l = c_l(f_l) \quad \forall\, l \in L$$

dove $c_l(\bullet)$ è la funzione di costo dell'arco l. Un esempio di funzione di costo separabile è la funzione BPR [18]

$$c_l = c_{0,l}\left(1+\alpha\left(\frac{f_l}{c_{A,l}}\right)^{\beta}\right) \tag{1.4}$$

con:

- $c_{0,l}$ costo dell'arco l a flusso nullo;
- $c_{A,l}$ capacità dell'arco l, che dipende da caratteristiche infrastrutturali e funzionali dell'arco e da eventuali disturbi esogeni (attraversamento di pedoni, manovre di parcheggio, condizioni meteorologiche, etc.);
- $\alpha$, $\beta$ coefficienti che possono essere stimati per ciascuna tipologia di infrastruttura stradale per mezzo di una regressione non lineare utilizzando dati di traffico rilevati su uno o più tronchi stradali, oppure possono essere stimati congiuntamente con i termini della matrice origine-destinazione (vedi paragrafo 1.1.3.2) ottimizzando una funzione che esprime lo scarto fra i flussi rilevati sulla rete e quelli simulati.

In letteratura sono state proposte numerose funzioni di costo, alcune delle quali sono adatte per archi urbani [49], altre per archi extraurbani [106] ed altre ancora per simulare il tempo di attesa alle intersezioni semaforizzate [3, 112, 113]. Sono inoltre state proposte funzioni di costo adatte in alcuni contesti particolari, che esprimono ad esempio il ritardo ai caselli autostradali [67] o il tempo necessario per la ricerca del parcheggio [16].

La relazione fra costi di percorso e flussi di arco si può ricavare dalla (1.2) per mezzo della (1.3)

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{c}(\mathbf{f}) + \mathbf{g}^{NA}$$

e successivamente, utilizzando la (1.1), si può ottenere la relazione fra costi di percorso e flussi di percorso

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{h}) + \mathbf{g}^{NA}$$

Un sistema di trasporto genera delle grandezze non considerate dagli utenti del sistema di trasporto nell'effettuare le proprie scelte di viaggio, cioè delle *esternalità* rispetto al mercato del servizio di trasporto. Alcune di queste grandezze, quali ad esempio l'incidentalità e le sue conseguenze (morti, feriti e danni materiali) e alcuni costi non percepiti (pneumatici, lubrificanti, svalutazione dei veicoli e talvolta anche il consumo di carburante), ricadono all'interno del sistema, e vengono calcolate per mezzo di *funzioni di prestazione*. Altre grandezze, quali ad esempio l'inquinamento acustico e atmosferico, ricadono all'esterno del sistema, e vengono calcolate per mezzo di *funzioni di impatto*.

Le funzioni di prestazione e quelle di impatto nei casi più semplici sono associate al singolo arco e dipendono dal flusso dell'arco, in modo del tutto analogo alle funzioni di

costo. Esse generalmente esprimono una misura dell'esternalità per unità di tempo e per unità di flusso. In questo caso, indicando col simbolo $e_{i,l}$ una generica esternalità i associata all'arco l, essa può essere calcolata per mezzo della funzione prestazione o di impatto $e_{i,l}(\bullet)$ per ogni arco della rete

$$e_{i,l} = e_{i,l}(f_l) \quad \forall\, l \in L$$

È possibile definire una matrice degli impatti **E**, la cui i-esima riga è associata all'impatto i e la l-esima colonna all'arco l, ed il cui generico elemento è il termine $e_{i,l}$.

Un esempio di funzione di prestazione per il calcolo del consumo di carburante per unità di tempo e per unità di flusso $e_{fuel,l}$ valido per archi extraurbani è [89]

$$e_{fuel,l} = e_{fuel,l}(f_l) = [\alpha_1 + \alpha_2 / v_l + \alpha_3 v_l^2]\, d_l$$

dove

- $d_l$ è la lunghezza dell'arco l;
- $v_l$ è la velocità media spaziale dei veicoli che transitano sull'arco l;
- $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sono parametri espressi in una opportuna unità di misura, che devono essere calibrati.

Per altri esempi di funzioni di prestazione e di impatto si rimanda alla letteratura esistente [25, 56, 61].

Non sempre è possibile associare la misura dell'esternalità al singolo arco, mentre in altri casi nonostante sia possibile effettuare tale associazione non è possibile esprimere la misura dell'esternalità per unità di flusso e per unità di tempo (ad esempio è il caso dell'inquinamento acustico: il livello sonoro viene solitamente espresso come una combinazione lineare di alcuni attributi, fra cui il logaritmo del flusso [14, 19]).

La differenza sostanziale fra le funzioni di costo da una parte e le funzioni di prestazione o di impatto dall'altra, consiste nel fatto che le prime servono a calcolare grandezze che influenzano la scelta degli utenti, cioè la domanda, e che quindi sono rilevanti ai fini della simulazione di un sistema di trasporto, mentre le seconde servono a calcolare grandezze che non intervengono nella simulazione del sistema, ma che sono rilevanti per valutarne il funzionamento e di conseguenza per il progetto.

## 1.1.3. Modelli di domanda

Per simulare un sistema di trasporto non si può prescindere dalla simulazione della domanda di trasporto. Tale componente è intrinsecamente legata alle scelte di decisori umani, e pertanto va analizzata con metodi che vanno al di fuori di un ambito strettamente ingegneristico, almeno per quanto riguarda l'accezione classica di questo termine.

Nel paragrafo 1.1.3.2 è descritta la struttura generale dei modelli di domanda di trasporto. Nel paragrafo 1.1.3.1 è introdotta la teoria più diffusamente utilizzata per simulare le scelte fra alternative discrete.

### 1.1.3.1. Teoria dell'utilità aleatoria

Il paradigma teorico più frequentemente utilizzato per la simulazione della domanda di trasporto è la *teoria dell'utilità aleatoria* [8, 11, 26, 37, 46, 69, 105], che è basato

sull'ipotesi che ogni individuo sia un decisore razionale che massimizza l'utilità della propria scelta. Più in dettaglio le ipotesi alla base della teoria dell'utilità aleatoria sono:

1. il generico decisore i considera un insieme di alternative, mutuamente esclusive, che costituiscono il suo *insieme di scelta* $H^i$;
2. il decisore i assegna ad ogni alternativa *j* del suo insieme di scelta un'*utilità percepita* $u^i_j$ che è funzione di alcune grandezze misurabili, dette *attributi* $\mathbf{x}^i_j$;
3. il decisore sceglie l'alternativa di massima utilità percepita.

L'utilità percepita non può essere conosciuta con certezza (a causa di errori di misura dell'analista o del decisore, di attributi omessi o sostituiti con altri attributi e della variazione dei pesi che i decisori attribuiscono a ciascun attributo) e pertanto nella teoria dell'utilità aleatoria si assume che essa sia rappresentata da una variabile aleatoria. Benché questa ipotesi sia alla base della teoria dell'utilità aleatoria e sia quella maggiormente consolidata in letteratura, è anche possibile rappresentare l'incertezza associata all'utilità percepita per mezzo di numeri fuzzy. Tale ipotesi, che è alla base della *teoria dell'utilità fuzzy* [48], trova una sua giustificazione nel tentativo di rappresentare un diverso tipo di incertezza, che non può essere rappresentato dalle variabili aleatorie. Queste ultime infatti sono adatte a rappresentare la dispersione dell'utilità fra i decisori, piuttosto che l'incertezza associata alla percezione del singolo decisore.

Nell'ambito della teoria dell'utilità aleatoria, l'utilità percepita è usualmente scomposta in due aliquote: una parte deterministica, detta *utilità sistematica* $v^i_j$, ed un *residuo aleatorio* $\varepsilon^i_j$, che è una variabile aleatoria considerata a media nulla

$$u^i_j = v^i_j + \varepsilon^i_j \tag{1.5}$$

La relazione (1.5) può essere scritta in termini vettoriali

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{v}^i + \boldsymbol{\varepsilon}^i$$

con:

- $\mathbf{u}^i$ vettore dell'utilità percepita del decisore i, la cui dimensione pari al numero di alternative contenute nell'insieme di scelta del decisore i, ed il cui generico termine è $u^i_j$;
- $\mathbf{v}^i$ vettore dell'utilità sistematica del decisore i, la cui dimensione è uguale a quella del vettore $\mathbf{u}^i$, ed il cui generico termine è $v^i_j$;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ vettore dell'utilità percepita del decisore *i*, la cui dimensione è uguale a quella del vettore $\mathbf{u}^i$, ed il cui generico termine è $\varepsilon^i_j$.

Dal momento che l'utilità percepita è una variabile aleatoria, non è possibile conoscere con certezza l'alternativa di massima utilità, cioè quella scelta dall'utente, ma è possibile solo attribuire a ciascuna alternativa j una probabilità $p^i[j \mid H^i]$ di essere l'alternativa scelta dall'utente i

$$p^i[\, j \mid H^i] = pr[u^i_j > u^i_{j'} \quad \forall\, j' \in H^i - \{j\}]$$

la quale, considerando la (1.5) diviene

$$p^i[\, j \mid H^i] = pr[v^i_j - v^i_{j'} > \varepsilon^i_{j'} - \varepsilon^i_j \quad \forall\, j' \in H^i - \{j\}]$$

Un modello di utilità aleatoria si dice *additivo* se la funzione di densità congiunta dei residui aleatori non dipende dalle utilità sistematiche. In tal caso le probabilità di scelta non variano se una costante è aggiunta alle utilità sistematiche di tutte le alternative, e dunque le probabilità si scelta dipendono solo dalle differenze delle utilità sistematiche. Si può inoltre dimostrare che le probabilità di scelta sono una funzione monotona non decrescente dell'utilità sistematica.

La relazione fra l'utilità sistematica e gli attributi è solitamente di tipo lineare, cioè è il prodotto di un vettore di *parametri* $\boldsymbol{\beta}$ per gli attributi $\mathbf{x}^i_j$

$$v^i_j = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}^i_j$$

oppure per una loro trasformazione funzionale $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^i_j)$

$$v^i_j = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^i_j)$$

I coefficienti $\boldsymbol{\beta}$ non sono noti e pertanto devono essere stimati per mezzo di una procedura detta *calibrazione*. Lo stimatore più diffusamente utilizzato è la *massima verosimiglianza*, per mezzo del quale i coefficienti incogniti sono ottenuti massimizzando la probabilità di riprodurre le scelte effettuate da un campione di utenti [11, 105].

Si definisce *soddisfazione* del decisore i, e si indica con $z^i$, il valore atteso della massima utilità percepita dal decisore *i*

$$z^i = z^i(\mathbf{v}^i) = att\left[max(\mathbf{u}^i)\right] = att\left[max(\mathbf{v}^i + \boldsymbol{\varepsilon}^i)\right]$$

Si può verificare che tale valore è sempre maggiore o uguale del valore della massima utilità sistematica

$$z^i(\mathbf{v}^i) \geq max(\mathbf{v}^i)$$

Differenti specificazioni di modelli di utilità aleatoria probabilistici si possono ottenere a partire dalle ipotesi generali assumendo differenti funzioni di densità di probabilità congiunta dei residui aleatori *pdf*(•), o equivalentemente le funzioni di distribuzioni congiunte *cdf*(•)[2]. La matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ è in generale una matrice simmetrica e semidefinita positiva.

Nel caso in cui la matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori è nulla, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$, il modello di domanda si dice *deterministico* e il decisore sceglie l'alternativa di massima utilità sistematica. Nel caso in cui vi siano più alternative di massima utilità sistematica, solo queste possono avere una probabilità di scelta non nulla, mentre tutte le altre alternative hanno una probabilità di scelta nulla.

Nel caso in cui la matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori è non nulla, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \mathbf{0}$, il modello di domanda si dice *non deterministico*. Usualmente si assume che i residui aleatori siano non perfettamente correlati e tutti con varianza non nulla[3]; in tal caso il modello di domanda si definisce *probabilistico*, e ciò equivale ad assumere che la matrice

[2] L'indice i relativo al decisore è stato omesso per semplicità di notazione. Nel seguito tale indice sarà frequentemente omesso.

[3] Il caso in cui la matrice di varianza-covarianza è non nulla ma la varianza di qualche residuo aleatorio è nulla e/o due residui aleatori sono perfettamente correlati è di limitato interesse pratico è non sarà trattato nel seguito.

di varianza-covarianza dei residui aleatori sia non singolare, cioè che il suo determinante sia non nullo, $det(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \neq 0$. Nel seguito saranno descritti alcuni dei più noti ed utilizzati modelli di domanda probabilistici.

Uno dei modelli più semplici e vastamente utilizzati è il modello *Logit Multinomiale* [11, 46], nel quale si assume che i residui aleatori siano distribuiti come variabili di Gumbel indipendenti ed identicamente distribuite con media nulla

$$cdf(\boldsymbol{\varepsilon}) = \prod_{j \in I} exp\left( -exp\left( -\frac{\varepsilon_j}{\vartheta} - \gamma \right) \right) \tag{1.6}$$

dove $\gamma$ è la costante di Eulero ($\gamma \cong 0{,}577$) e $\vartheta$ è un parametro associato alla varianza[4]. La matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori è

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\pi^2 \vartheta^2}{6} \mathbf{I} \tag{1.7}$$

dove **I** è la matrice identità di dimensione pari al numero di alternative contenute nell'insieme di scelta. Si può dimostrare che la probabilità di scelta di una generica alternativa j è

$$p[j \mid H] = \frac{exp(v_j / \vartheta)}{\sum_{j' \in I} exp(v_{j'} / \vartheta)}$$

La soddisfazione è data dalla seguente espressione

$$z(\mathbf{v}) = \vartheta ln \sum_{j \in I} exp(v_j / \vartheta)$$

Il modello Logit Multinomiale gode della proprietà dell'*indipendenza dalle alternative irrilevanti*, cioè i rapporti fra le probabilità di scelta di qualsiasi coppia di alternative sono costanti e indipendenti dal numero e dall'utilità sistematica delle altre alternative di scelta. Tale proprietà deriva dalla struttura diagonale della matrice di varianza-covarianza (1.7), che a sua volta dipende dall'indipendenza delle distribuzioni dei residui aleatori (1.6). Essa comporta dei risultati inattesi dovuti al fatto che, secondo il modello, alternative simili sono viste come assolutamente indipendenti dal decisore. Ad esempio [11], se un decisore ha la stessa probabilità di scegliere l'alternativa "autovettura" e l'alternativa "bus rosso" (cioè ½ per ciascuna), quando si introduce una nuova alternativa "bus blu", consistente in una nuova linea di trasporto collettivo che effettua le stesse fermate della linea rossa esattamente agli stessi orari e con identica tipologia di mezzi (ad eccezione del colore, che tuttavia si può ragionevolmente assumere che non influenzi le scelte degli utenti), le tre alternative avranno ciascuna una probabilità di scelta pari ad ⅓. Tale problema è un limite fondamentale del modello Logit Multinomiale quando esso deve essere applicato in un

[4] Se si utilizza una specificazione lineare dell'utilità sistematica, il vettore $\boldsymbol{\beta}$ ed il parametro $\vartheta$ non possono essere calibrati separatamente; solo il loro rapporto $\boldsymbol{\beta} / \vartheta$ può essere calibrato.

contesto nel quale vi è una non trascurabile similitudine fra le alternative, come ad esempio nel caso della scelta del percorso.

Per superare questo limite del modello Logit Multinomiale, esso è stato esteso introducendo il modello *Logit Gerarchizzato*, il quale nella sua forma più semplice, *Logit Gerarchizzato ad un livello* [114], prevede che le alternative siano raggruppate in funzione della loro similitudine[5]. Si suppone che il meccanismo di scelta avvenga in due fasi: nella prima si effettua la scelta fra i gruppi individuati, e nella seconda si effettua la scelta fra le alternative incluse nel gruppo selezionato nella prima fase. Nella prima fase ad ogni gruppo viene associata una utilità sistematica corrispondente alla soddisfazione relativa all'insieme di alternative contenute nel gruppo stesso, mentre nella seconda fase a ciascuna alternativa è associata la propria utilità sistematica. Ad ogni fase di scelta i residui aleatori sono distribuiti come variabili di Gumbel indipendenti ed identicamente distribuite. Tale modo di operare introduce una covarianza fra le alternative incluse nello stesso gruppo, e pertanto la matrice di varianza-covarianza possiede una struttura diagonale a blocchi.

Il modello *Logit Gerarchizzato a più livelli* [26, 40] (anche noto come *Tree Logit*) generalizza quello ad un livello, supponendo che sia possibile raggruppare le alternative in più gruppi e sottogruppi con un qualsivoglia livello di nidificazione. Le scelte avvengono in più fasi, prima fra i gruppi a livello gerarchico più alti e poi progressivamente fino alle singole alternative. La matrice di varianza-covarianza associata a questo modello e una matrice diagonale a blocchi e sottoblocchi, la cui struttura è analoga alla struttura dei gruppi e sottogruppi[6].

Il modello *Cross Nested Logit* [71, 85] generalizza ulteriormente il modello Logit Gerarchizzato a più livelli, assumendo che una data alternativa possa appartenere a gruppi diversi, ciascuno con un certo grado di appartenenza, la cui somma complessiva è unitaria[7]. In tal modo è possibile avere una matrice di varianza-covarianza che non sia vincolata ad essere diagonale a blocchi (e sottoblocchi). Tale modello non è ancora consolidato, ma è attualmente in fase di studio.

I modelli Logit Multinomiale, Logit Gerarchizzato ad uno o più livelli e Cross Nested Logit possono essere visti come casi particolari di una classe di modelli, i cosiddetti modelli *GEV* (*Generalized Extreme Value*) [10, 71]. È dunque possibile dimostrare come tali modelli si possano derivare dai modelli GEV. Tale classe di modelli è caratterizzata dalla possibilità di calcolare le probabilità di scelta delle alternative in forma chiusa.

Accanto ai modelli della famiglia Logit, un altro modello vastamente utilizzato è il modello *Probit* [37]. Alla base di tale modello si assume che i residui aleatori siano distribuiti come una variabile Normale multivariata

[5] Ad esempio, supponendo di simulare una scelta fra vari modi di trasporto, essi potrebbero essere raggruppati in due gruppi: collettivi e individuali.

[6] Ad esempio, con riferimento all'esempio riportato nella nota 5, i modi di trasporto individuali potrebbero essere ulteriormente suddivisi in due sottogruppi: motorizzati (autovettura, ciclomotore, ecc.) e non motorizzati (piedi, bicicletta, ecc.). In tal modo la covarianza fra uno qualsiasi dei modi collettivi e uno qualsiasi di quelli individuali è nulla, mentre ad esempio esiste una certa covarianza fra l'autovettura e il modo piedi (inclusi nello stesso gruppo dei modi individuali) ed una covarianza ancora più grande fra l'autovettura ed il ciclomotore (che oltre ad essere nello stesso gruppo dei modi individuali, sono anche nello stesso sottogruppo dei modi motorizzati).

[7] Ad esempio, con riferimento all'esempio riportato nella nota 5, il modo car pool (uso collettivo dell'autovettura) potrebbe essere incluso sia nel gruppo dei modi collettivi che in quello dei modi individuali.

$$pdf(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{det(2\pi \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon})}} exp\left(-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right)$$

dove *det*(•) è una funzione che restituisce il determinante di una matrice quadrata. La matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ è una qualsiasi matrice simmetrica definita positiva, cioè è possibile definire qualsiasi struttura di correlazione fra le alternative. La probabilità di scegliere una data alternativa *j* può essere calcolata integrando la funzione di densità nella regione dove l'utilità dell'alternativa *j* è massima, ottenendo la seguente espressione

$$p[j \mid H] = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{v_j - v_1 + \varepsilon_j} \cdots \int_{\varepsilon_j=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{\varepsilon_{|I|}=-\infty}^{v_j - v_{|I|} + \varepsilon_j} \frac{1}{\sqrt{det(2\pi \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon})}} exp\left(-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right) d\varepsilon_1 \cdots d\varepsilon_j \cdots d\varepsilon_{|I|}$$

dove |H| è la cardinalità dell'insieme di scelta H. Tale integrale non può essere risolto in forma chiusa e pertanto non è possibile ottenere una espressione della probabilità di scelta in forma chiusa, fatto che costituisce il principale svantaggio nell'utilizzo del modello Probit. Le probabilità di scelta possono essere ottenute effettuando delle estrazioni casuali ripetute dei residui aleatori [8] (metodo Monte Carlo): ad ogni estrazione si individua l'alternativa di massima utilità, e la probabilità di scegliere una data alternativa si pone pari alla frequenza con la quale l'alternativa stessa risulta essere quella di massima utilità. Altri metodi possono essere utilizzati per calcolare le probabilità di scelta fornite da un modello Probit: ad esempio il metodo di Clark [33], oppure il metodo descritto paragrafo 1.2.3.1 per la scelta del percorso.

### 1.1.3.2. Struttura e proprietà generali dei modelli di domanda di trasporto

L'analisi della domanda di trasporto, con particolare riferimento alla domanda viaggiatori in ambito urbano, serve a determinare la quantità media dei viaggiatori con determinate caratteristiche che in un determinato periodo di riferimento si spostano da un origine r ad una destinazione s, servendosi di un certo modo di trasporto e di uno fra i percorsi disponibili. A tal fine sono utilizzati modelli di domanda che cercano di riprodurre nel modo migliore possibile le scelte degli utenti di un sistema di trasporto, e possono essere formalmente espressi attraverso una relazione che lega la domanda $d_{rs}$ che si sposta dall'origine r alla destinazione s con certe caratteristiche $q_1$, $q_2$, …, all'insieme delle variabili socioeconomiche $X_{SE}$ ed a quello delle variabili relative al livello di servizio $X_T$

$$d_{rs}[q_1, q_2, ...] = d_{rs}(X_{SE}, X_T)$$

Solitamente tali modelli simulano le scelte considerando i decisori suddivisi in gruppi omogenei, detti *categorie*.

Un sistema di modelli di domanda per motivi di trattabilità analitica è usualmente frazionato in più fasi successive, associate alle varie dimensioni di scelta. Per gli spostamenti in ambito urbano tale suddivisione è usualmente effettuata in quattro fasi,

[8] Per generare i residui aleatori è necessario esprimere la variabile Normale multivariata *pdf*(**ε**) in funzione di più variabili Normali indipendenti, e per fare ciò è necessario ricorrere alla fattorializzazione della matrice di varianza-covarianza $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

ottenendo la seguente sequenza di sottomodelli nota come *modello di domanda a quattro stadi* [26]

$$d^i_{rs}[q_S, q_H, q_M, k] = n^i[r] \cdot \sum_x x\, p^i[x \mid q_S, q_H, r](X_{SE}, X_T) \cdot p^i[s \mid q_S, q_H, r](X_{SE}, X_T)$$
$$\cdot\, p^i[q_M \mid q_S, q_H, r, s](X_{SE}, X_T) \cdot p^i[k \mid q_S, q_H, r, s, q_M](X_{SE}, X_T)$$

dove

- $d^i_{rs}[q_S, q_H, q_M, k]$ è la domanda della categoria i che parte dall'origine r, è diretta alla destinazione s, per il motivo $q_S$, nella fascia oraria $q_H$, utilizzando il modo $q_M$ ed il percorso k;
- $n^i[r]$ è il numero di individui della categoria i che si trovano nella zona di origine r;
- $p^i[x \mid q_S, q_H, r](X_{SE}, X_T)$ è il *modello di emissione*, che fornisce la percentuale di individui della categoria i che, trovandosi in r, effettuano x spostamenti per il motivo $q_S$ nella fascia oraria $q_H$;
- $p^i[s \mid q_S, q_H, r](X_{SE}, X_T)$ è il *modello di distribuzione*, che fornisce la percentuale di individui della categoria i che, spostandosi da r per il motivo $q_S$ nella fascia oraria $q_H$, si recano nella zona di destinazione s;
- $p^i[q_M \mid q_S, q_H, r, s](X_{SE}, X_T)$ è il *modello di scelta modale*, che fornisce la percentuale di individui della categoria i che, spostandosi da r a s per il motivo $q_S$ nella fascia oraria $q_H$, utilizzano il modo di trasporto $q_M$;
- $p^i[k \mid q_S, q_H, r, s, q_M](X_{SE}, X_T)$ è il *modello di scelta del percorso*, che fornisce la percentuale di individui della categoria i che, spostandosi da r a s per il motivo $q_S$ nella fascia oraria $q_H$ con il modo $q_M$, utilizzano il percorso k.

Ciascuna fase è ovviamente condizionata dalle fasi precedenti; ad esempio è evidente che la scelta del percorso dipende dal modo di trasporto. D'altra parte ciascuna fase deve tenere conto delle fasi successive; infatti la scelta di un modo di trasporto piuttosto che un altro dipende dai percorsi che è possibile effettuare con quel dato modo. In una data fase di scelta è possibile tenere conto delle fasi successive utilizzando nella specificazione dell'utilità sistematica la soddisfazione associata alla scelta fra le alternative della fase immediatamente successiva. La struttura del modello di domanda a quattro stadi è riportata nella Fig. 1.3.

Benché la sequenza di modelli riportata sia quella di gran lunga più utilizzata per la simulazione della domanda di trasporto viaggiatori in ambito urbano, è possibile specificare sequenze diverse sia per la tipologia dei modelli considerati sia per l'ordine nel quale essi intervengono. Ad esempio è possibile considerare esplicitamente la scelta della fascia oraria e/o della tipologia e della zona di sosta.

Ad ogni stadio è possibile utilizzare modelli di domanda di tipo differente. Tali modelli possono essere classificati in funzione di alcuni aspetti.

Essi si dicono *comportamentali* o *interpretativi* se derivano da una esplicita ipotesi sul comportamento degli utenti, mentre si dicono *descrittivi* o *non-interpretativi* se descrivono una relazione fra la domanda di trasporto e le variabili socioeconomiche $X_{SE}$ e del livello di servizio $X_T$, senza assumere esplicite ipotesi sul comportamento degli utenti. Possono esistere modelli misti, nei quali alcuni sottomodelli sono comportamentali, mentre altri sono descrittivi. L'utilizzo di approcci descrittivi è solitamente limitato ai sottomodelli di emissione e distribuzione, mentre la scelta modale e la scelta del percorso sono

comunemente simulati per mezzo di modelli comportamentali. Gli approcci comportamentali sono solitamente basati sulla teoria dell'utilità aleatoria.

I modelli possono essere inoltre classificati in *aggregati* o *disaggregati*: nel primo caso le variabili $X_{SE}$ e $X_T$ sono riferite ad un gruppo di decisori, mentre nel secondo sono riferite al singolo decisore. La distinzione fra modelli aggregati e disaggregati non è netta, in quanto sono possibili di versi livelli di aggregazione. I modelli di domanda utilizzati per la simulazione di un sistema di trasporto sono caratterizzati da un livello minimo di aggregazione che è almeno a livello di zona di traffico.

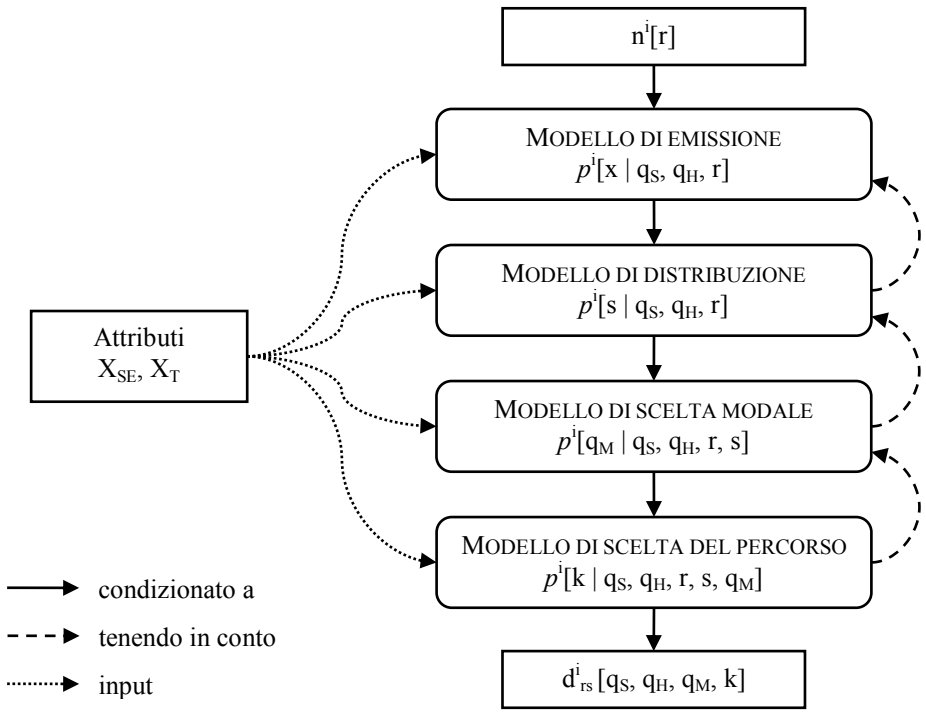


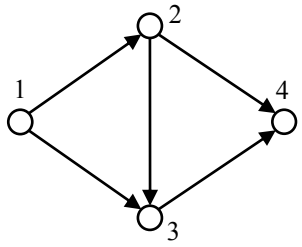

**Fig. 1.3 – Modello di domanda a quattro stadi [26]**

Il risultato dei primi tre stadi (emissione, distribuzione e scelta modale) è una *matrice origine-destinazione* per ogni modo considerato[9]. Tale matrice ha dimensioni $|R|\times|S|$, cioè è costituita da tante righe quanti sono i centroidi origine e tante colonne quanti sono i centroide destinazione. Il generico elemento $d_{rs}$ di tale matrice rappresenta la domanda di trasporto che si sposta fra tutti i percorsi che connettono l'origine r alla destinazione s. Per motivi di convenienza analitica tale matrice viene spesso rappresentata come un vettore, che sarà indicato con **d**; gli elementi di tale vettore sono i termini $d_{rs}$ della matrice origine-destinazione ordinati in modo crescente per origine e poi per destinazione. Un esempio di matrice origine-destinazione e del corrispondente vettore di domanda sono riportati nella

Nel caso cui in le variazioni dei costi di percorso dovute alla congestione influenzano solo la scelta del percorso ma non gli stadi di scelta superiori allora la domanda si dice *rigida*. In tal caso il vettore dei flussi di domanda **d** può dipendere solo da attributi dei

[9] La matrice origine-destinazione è riferita alla fascia oraria considerata. Nel caso in cui si considerano diverse categorie di utenti e diversi motivi dello spostamento si ottengono più matrici, che possono essere sommate in una unica matrice solo se il modello utilizzato per la scelta del percorso è indifferente rispetto alla categoria dell'utente ed al motivo dello spostamento.

percorsi che a loro volta non dipendono dai flussi (ad esempio il costo a flusso nullo). Se invece anche altre dimensioni di scelta (modo, distribuzione, emissione) sono influenzate da tali variazioni allora la domanda si dice *elastica*. In tal caso il vettore dei flussi di domanda **d** dipende dai costi di percorso congestionati (cioè calcolati in funzione dei flussi) e per evidenziare tale dipendenza potrà essere indicato col simbolo ***d***(**g**).




| | |
|---|---|
| Nodi | N ≡ {1, 2, 3, 4} |
| Archi | L ≡ {(1, 2); (1, 3); (2, 3); (2, 4); (3, 4)} |
| Centroidi origine | R ≡ {1, 2, 3} |
| Centroidi destinazione | S ≡ {3, 4} |

Matrice origine destinazione (utenti/h)

| *Origine* / *Destinazione* | 1 | 2 | 3 | 4 | totale |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 300 | 150 | 450 |
| 2 | 0 | 0 | 150 | 100 | 250 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 200 | 200 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| totale | 0 | 0 | 450 | 500 | 900 |

Vettore di domanda (utenti/h)

$$\begin{bmatrix} d_{13} = 300 \\ d_{14} = 150 \\ d_{23} = 150 \\ d_{24} = 100 \\ d_{34} = 200 \end{bmatrix}$$

**Fig. 1.4 - Esempio di matrice origine-destinazione e del corrispondente vettore di domanda**

Il modello di scelta del percorso, data una generica coppia origine-destinazione rs, attribuisce ad ogni percorso $k \in K_{rs}$ una probabilità di scelta $p_{rs,k}$ in funzione delle utilità sistematiche di tutti i percorsi della coppia origine-destinazione $\mathbf{v}_{rs}$. Detto $\mathbf{p}_{rs}$ il vettore costituito dalle probabilità $p_{rs,k}$, i flussi sui percorsi che collegano r ad s sono dati dalla seguente espressione

$$\mathbf{h}_{rs} = d_{rs}\, \boldsymbol{p}_{rs}(\mathbf{v}_{rs}) \tag{1.8}$$

Assumendo che le utilità sistematiche di percorso siano uguali all'opposto dei costi di percorso[10]

$$\mathbf{v}_{rs} = -\mathbf{g}_{rs}$$

dalla (1.8) si ottiene la seguente espressione

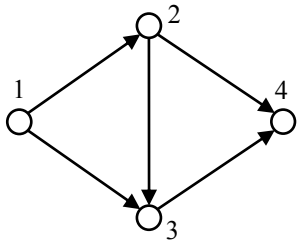
[10] In generale le utilità sistematiche potrebbero anche dipendere da attributi socioeconomici dell'utente.

$$\mathbf{h}_{rs} = d_{rs}\, \boldsymbol{p}_{rs}(-\mathbf{g}_{rs})$$

che si può generalizzare per tutte le coppie origine-destinazione per mezzo della seguente espressione

$$\mathbf{h} = \boldsymbol{P}(-\mathbf{g})\,\mathbf{d} \tag{1.9}$$

dove **P** è la *matrice delle probabilità di scelta del percorso*. Tale matrice ha dimensione |K|×|RS|, cioè ha tante righe quanti sono i percorsi e tante colonne quante sono le coppie origine-destinazione. Ogni colonna è associata ad una data coppia origine-destinazione rs e contiene il vettore $\mathbf{p}_{rs}$. Ogni riga è associata ad un percorso e, siccome ogni percorso appartiene ad una ed una sola coppia origine-destinazione, contiene un solo valore di probabilità non nullo. La struttura di tale matrice è illustrata nella Fig. 1.5.




| | |
|---|---|
| Nodi | N ≡ {1, 2, 3, 4} |
| Archi | L ≡ {(1, 2); (1, 3); (2, 3); (2, 4); (3, 4)} |
| Centroidi origine | R ≡ {1, 2, 3} |
| Centroidi destinazione | S ≡ {3, 4} |

Matrice delle probabilità di scelta del percorso

| *Coppia origine-destinazione* / *Percorso* | | 1-3 | 1-4 | 2-3 | 2-4 | 3-4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1,00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 | 0,50 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | 0 | 0,20 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | 0,30 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | | 0 | 0 | 1,00 | 0 | 0 |
| 6 | | 0 | 0 | 0 | 0,40 | 0 |
| 7 | | 0 | 0 | 0 | 0,60 | 0 |
| 8 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,00 |

**Fig. 1.5 – Esempio di matrice delle probabilità di scelta del percorso**

Le probabilità di scelta dei percorsi vengono usualmente calcolate col modello Probit o col modello Logit Multinomiale.

La specificazione più diffusamente utilizzata del modello Probit applicato alla scelta del percorso [41] assume che

- la varianza del residuo aleatorio associato ad un generico percorso k sia proporzionale al costo (o a qualche altro attributo) del percorso quando tutti gli archi che lo compongono hanno flusso nullo; tale grandezza, indicata con $g_{0,k}$ sarà detta costo a flusso nullo del percorso k[11];
- la covarianza di due residui aleatori associati ai generici percorsi k e k' sia proporzionale al costo del tratto in comune fra i due percorsi quando tutti gli archi in comune hanno flusso nullo; tale grandezza, indicata con $g_{0,k\text{-}k'}$ sarà detta costo a flusso nullo del tratto in comune fra i percorsi k e k'.

Cioè in simboli

$$var[\varepsilon_k] = \xi\, g_{0,k} \tag{1.10.a}$$

$$cov[\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}] = \xi\, g_{0,k\text{-}k'} \tag{1.10.b}$$

dove $\xi$ è la costante di proporzionalità che deve essere calibrata.

Utilizzando il modello Logit Multinomiale la probabilità di scelta di un generico percorso k appartenente alla coppia origine-destinazione rs è data da

$$p_{rs,k} = \frac{exp\left(-g_k/\vartheta\right)}{\sum_{k'\in K_{rs}} exp\left(g_{k'}/\vartheta\right)} \tag{1.11}$$

L'utilizzo del modello Logit Multinomiale comporta il fatto che percorsi molto simili (cioè costituiti per una parte rilevante dagli stessi archi) vengono visti fra loro come indipendenti e pertanto vengono sovrastimate le loro probabilità di scelta.

Per risolvere questo problema, senza tuttavia rinunciare ad ottenere le probabilità di scelta in forma chiusa, è stato proposto il modello *C-Logit* [30], che consiste in una particolare specificazione del modello Logit Multinomiale

$$p_{rs,k} = \frac{exp\left(\left(-g_k - c_{F,k}\right)/\vartheta\right)}{\sum_{k'\in K_{rs}} exp\left(\left(-g_{k'} - c_{F,k}\right)/\vartheta\right)}$$

dove il termine $c_{F,k}$, detto *fattore di sovrapposizione* del percorso k, riduce l'utilità sistematica del percorso k in funzione del suo grado di sovrapposizione con gli altri percorsi. Il fattore di sovrapposizione può essere specificato in diversi modi, ad esempio con riferimento ad un percorso k appartenente alla coppia origine-destinazione rs

$$c_{F,k} = \beta_0\, ln\left(1 + \sum_{k'\in K_{rs}-\{k\}} \frac{g_{0,k-k'}}{\left(g_{0,k}\, g_{0,k'}\right)^{1/2}}\right)$$

[11] È utile rimarcare il fatto che tale grandezza non è il costo del percorso quando il flusso di tale percorso è nullo. È necessario che siano nulli i flussi di tutti i percorsi che hanno archi in comune col percorso in questione.

dove $\beta_0$ è un parametro da calibrare. Un'altra possibile specificazione del fattore di sovrapposizione è

$$c_{F,k} = \beta_0 \sum_{l \in k} \frac{c_{0,l}}{g_{0,k}} ln\, \nu_{l,rs}$$

dove $\nu_{l,rs}$ è il numero di percorsi appartenenti alla coppia origine-destinazione rs che utilizzano l'arco l.

### 1.1.4. Modelli di assegnazione

Un modello di assegnazione simula come la domanda e l'offerta interagiscono fra di loro nei sistemi di trasporto. Per mezzo di un modello di assegnazione è possibile conoscere i flussi e le prestazioni su ogni arco della rete.

In funzione di varie ipotesi sulla domanda, sull'offerta e sulla loro interazione si possono realizzare diversi modelli di assegnazione. Queste ipotesi determinano alcuni fattori di classificazione dei modelli di assegnazione.

I fattori relativi all'offerta sono:

- il tipo di servizio, che può essere simulato in modo continuo nel tempo oppure in modo discontinuo, rappresentando l'offerta per mezzo di *reti diacroniche*[12] ed effettuando una cosiddetta assegnazione *ad orario*;
- l'effetto della congestione, che può essere tenuto in conto (reti congestionate) o meno (reti non congestionate).

I fattori relativi alla domanda sono:

- la segmentazione della domanda, in funzione della quale si può effettuare una assegnazione *mono-classe*, nella quale gli utenti sono distinti esclusivamente per la coppia origine-destinazione, oppure *multi-classe*, nella quale almeno per una coppia origine-destinazione si considerano più categorie di utenti, ciascuna delle quali presenta differenti caratteristiche comportamentali e percepisce costi diversi;
- l'elasticità della domanda, in funzione della quale si può effettuare una assegnazione a *domanda rigida* oppure a *domanda elastica*;
- il comportamento di scelta del percorso, che può essere *completamente preventivo*, se si assume che il decisore scelga il proprio percorso basandosi solo sulle informazioni disponibili all'origine dello spostamento, oppure *preventivo-adattivo*, se si assume che il decisore assuma all'origine dello spostamento una strategia di viaggio in funzione delle informazioni a sua disposizione, e compia successivamente delle scelte durante il viaggio in funzione delle nuove informazioni disponibili[13];

[12] Nelle reti diacroniche i nodi sono associati ad una specifica coordinata temporale (oltre che a coordinate spaziali). In tale modo è possibile rappresentare ogni singola corsa di una linea di trasporto collettivo.

[13] Il caso della scelta del percorso preventiva-adattiva è tipica dei sistemi di trasporto collettivo ad alta frequenza in cui l'utente sceglie inizialmente un insieme di linee attrattive (detto *ipercammino*) e successivamente, in funzione degli arrivi degli autobus alle fermate, sceglie una successione di corse.

- il modello di scelta del percorso, che può essere deterministico oppure probabilistico ;
- l'obiettivo perseguito dall'utente, che può consistere nella massimizzazione della propria utilità oppure nella massimizzazione dell'utilità collettiva degli utenti del sistema.

I fattori relativi all'interazione domanda-offerta sono:

- la simulazione della evoluzione dinamica intraperiodale del sistema, cioè tenendo conto delle variazioni che intervengono all'interno del periodo di simulazione, oppure la simulazione in condizioni statiche[14];
- la simulazione dell'evoluzione dinamica interperiodale[15] del sistema oppure la simulazione del suo stato di equilibrio.

Dalla combinazione dei precedenti fattori si possono ottenere molteplici modelli di domanda, ciascuno adatto a simulare alcune tipologie di contesti. Non tutte le combinazioni dei fattori sopra descritti sono possibili: ad esempio in assenza di congestione non avrebbe senso considerare la domanda elastica.

Nel seguito verranno descritti alcuni possibili modelli di assegnazione, che derivano dalla combinazione di alcuni dei fattori sopra descritti: la congestione, il modello di scelta del percorso e l'obiettivo perseguito dall'utente. Si assumerà che il tipo di servizio sia continuo e che il comportamento di scelta del percorso sia completamente preventivo, come in generale avviene nella simulazione di un sistema di trasporto stradale. Si assumerà inoltre che la domanda sia non segmentata (assegnazione mono-classe) e rigida e si trascureranno le evoluzioni dinamiche intraperiodali ed interperiodali del sistema. Infine si assumeranno nulli i costi non additivi di percorso.

Se si assume che l'obiettivo dell'utente sia la massimizzazione della propria utilità, si effettua la cosiddetta *assegnazione di ottimo di utente*. In funzione della presenza o assenza di congestione e del modello di scelta del percorso è possibile individuare quattro tipi di assegnazione di ottimo di utente:

- *assegnazione di carico deterministico della rete*, indicata con l'acronimo DNL (*deterministic network loading*), nella quale si assume la rete non congestionata ed il modello di scelta del percorso deterministico;
- *assegnazione di carico stocastico della rete*, indicata con l'acronimo SNL (*stochastic network loading*), nella quale si assume la rete non congestionata ed il modello di scelta del percorso stocastico;
- *assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti*, indicata con l'acronimo DUE (*deterministic user equilibrium*), nella quale si assume la rete congestionata ed il modello di scelta del percorso deterministico;

[14] L'ipotesi di staticità intraperiodale è realistica solo se la domanda di trasporto e le caratteristiche dell'offerta si possono assumere costanti su un periodo di riferimento sufficientemente lungo rispetto ai tempi di viaggio nel sistema. In caso contrario è necessario ricorrere alla simulazione della variabilità intraperiodale del sistema.

[15] La simulazione dinamica interperiodale di un sistema di trasporto prevede la simulazione del sistema in intervalli di tempo successivi omogenei (ad esempio l'ora di punta mattutina dei giorni feriali), assumendo l'esistenza di un meccanismo di aggiornamento del costo percepito dagli utenti e che vi sia un'aliquota di utenti che ogni giorno rivaluta le proprie scelte in funzione dei costi percepiti.

- *assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti*, indicata con l'acronimo SUE (*stochastic user equilibrium*), nella quale si assume la rete congestionata ed il modello di scelta del percorso stocastico.

Se si assume che l'obiettivo degli utenti sia la massimizzazione della utilità collettiva e non della propria utilità, si ottiene l'*assegnazione di ottimo di sistema*. Tale tipo di assegnazione ha senso solo se la rete è congestionata, poiché nel caso di rete non congestionata a causa dell'assenza di interazioni fra gli utenti ciascun comportamento che tende a massimizzare la propria utilità contemporaneamente tende a massimizzare l'utilità collettiva degli utenti. In funzione del modello di scelta del percorso è possibile individuare due tipi di assegnazione di ottimo di sistema:

- *assegnazione deterministica di ottimo di sistema*, indicata con l'acronimo DSO (*deterministic system optimum*), nella quale si assume che il modello di scelta del percorso sia deterministico;
- *assegnazione deterministica di ottimo di sistema*, indicata con l'acronimo SSO (*stochastic system optimum*), nella quale si assume che il modello di scelta del percorso sia stocastico.

La classificazione dei modelli sopra descritta è schematicamente riportata nella Fig. 1.6.

| | | | Modello di scelta del percorso | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Deterministico | Stocastico |
| Rete | Non congestionata | | Assegnazione di carico deterministico della rete (DNL) | Assegnazione di carico stocastico della rete (SNL) |
| | Congestionata | Ottimo di utente | Assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti (DUE) | Assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti (SUE) |
| | | Ottimo di sistema | Assegnazione deterministica di ottimo di sistema (DSO) | Assegnazione stocastica di ottimo di sistema (SSO) |

**Fig. 1.6 – Classificazione dei modelli di assegnazione**

I modelli di assegnazione di carico della rete sono trattati nei paragrafi 1.1.4.1 e 1.1.4.2 rispettivamente nel caso di modello di scelta del percorso deterministico e stocastico. I modelli di assegnazione di equilibrio sono trattati nei paragrafi 1.1.4.3 e 1.1.4.4 rispettivamente nel caso di modello di scelta del percorso deterministico e stocastico. I modelli di assegnazione di ottimo di sistema sono trattati nei paragrafi 1.1.4.5 e 1.1.4.6 rispettivamente nel caso di modello di scelta del percorso deterministico e stocastico.

Per gli aspetti non trattati nel seguito ci si può riferire all'ampia letteratura esistente: per l'assegnazione ad orario [78, 79], per l'assegnazione con scelta del percorso preventiva-adattiva [77, 100], per l'assegnazione multi-classe e per quella a domanda elastica [20], per l'assegnazione dinamica intraperiodale [12, 26], per l'assegnazione dinamica interperiodale [21].

### 1.1.4.1. Assegnazione di carico deterministico della rete (DNL)

Se si assumono i costi indipendenti dai flussi e il modello di scelta del percorso deterministico si ottiene il modello di assegnazione di carico deterministico della rete.

L'assegnazione di carico deterministico della rete è regolata dal *primo principio di Wardrop* [111] che afferma che per ogni coppia origine-destinazione, il costo di ogni percorso utilizzato è uguale, ed è minore o uguale del costo di ogni percorso non utilizzato [16]. In generale sono possibili diversi vettori dei flussi di percorso in corrispondenza degli stessi costi in quanto se due o più percorsi sono di minimo costo i flussi si possono ripartire fra di essi in qualsiasi proporzione. Pertanto la relazione fra costi di percorso e flussi di percorso è una mappa uno a molti.

Per tale motivo i flussi di percorso nell'ipotesi di carico deterministico della rete, indicati col simbolo $\boldsymbol{h}_{DNL}$, vengono solitamente espressi come il risultato di un sistema di disuguaglianze. È possibile dimostrare che tali flussi si possono ottenere come il risultato del seguente insieme di disuguaglianze

$$\mathbf{g}^T(\mathbf{h} - \mathbf{h}_{DNL}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{h} \in S_h(\mathbf{d}) \tag{1.12}$$

dove $S_h$ è l'*insieme di ammissibilità dei flussi di percorso* che dipende dal vettore dei flussi di domanda **d**. I flussi di percorso devono essere non negativi e la somma dei flussi di percorso relativi ad ogni coppia origine-destinazione deve essere pari alla domanda relativa alla coppia stessa. Pertanto l'insieme di ammissibilità dei flussi di percorso è definito nel seguente modo

$$S_h = \{\mathbf{h} : \mathbf{h}_{rs} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{1}^T\mathbf{h}_{rs} = d_{rs} \ \forall\, rs\}$$

L'insieme $S_h$ è un poliedro compatto (cioè chiuso e limitato) e convesso. Esso è inoltre non vuoto se la rete è connessa, cioè se per ogni coppia origine-destinazione esiste almeno un percorso che connette il centroide origine a quello destinazione.

L'insieme di disuguaglianze (1.12) può essere equivalentemente espresso in funzione dei costi e flussi di arco $\mathbf{f}_{DNL}$ grazie alle (1.1) e (1.2). Trascurando i costi non additivi di percorso si ottiene

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{DNL}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{f} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.13}$$

dove $S_f$ è l'*insieme di ammissibilità dei flussi di arco* che può essere definito in funzione dell'insieme di ammissibilità dei flussi di percorso grazie alla (1.1)

$$S_f = \{\boldsymbol{f} : \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{h} \ \forall\, \boldsymbol{h} \in S_h\}$$

Anche l'insieme $S_f$, come $S_h$, è un poliedro compatto e convesso, ed è non vuoto se la rete è connessa.

L'assegnazione di carico deterministico della rete può anche essere formulata con un modello di ottimizzazione lineare che minimizza il costo totale sulla rete

$$\mathbf{f}_{DNL} = arg\ \min_{\mathbf{f}}\ \mathbf{c}^T\mathbf{f} \tag{1.14.a}$$

con

[16] L'enunciato originale è il seguente: "I tempi di viaggio su tutti i percorsi effettivamente utilizzati sono uguali, e sono minori di quelli che sarebbero sperimentati da un singolo veicolo su un qualsiasi percorso inutilizzato".

$$\mathbf{f} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.14.b}$$

Questa formulazione è immediatamente comprensibile dal momento che in assenza di congestione la condizione di ottimo di sistema e ottimo di utente coincidono.

In sintesi il vettore $\mathbf{f}_{DNL}$ è esprimibile per mezzo di una *mappa di carico deterministico della rete* $\boldsymbol{f}_{DNL}(\bullet)$ che lega i flussi $\mathbf{f}_{DNL}$ ai vettori dei costi **c** e della domanda **d**. Tale mappa può essere espressa con la seguente relazione ottenuta a partire dalle relazioni (1.1) e (1.2) relative all'offerta e dalla (1.9) relativa alla domanda. Trascurando i costi non additivi di percorso si ottiene

$$\mathbf{f}_{DNL} = \boldsymbol{f}_{DNL}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{c})\, \mathbf{d} \quad \in S_f(\mathbf{d}) \;\forall\; \mathbf{c} \tag{1.15}$$

Qualsiasi sia il vettore dei costi considerato, se la rete è connessa esiste almeno una soluzione, cioè un vettore dei flussi $\mathbf{f}_{DNL}$ che soddisfa la formulazione (1.13) o equivalentemente la (1.14). L'unicità di tale soluzione non è garantita.

### 1.1.4.2. Assegnazione di carico stocastico della rete (SNL)

Se si assumono i costi indipendenti dai flussi e il modello di scelta del percorso probabilistico si ottiene il modello di assegnazione di carico stocastico della rete.

L'esigenza di utilizzare un modello stocastico (rispetto ad un più semplice modello deterministico) ha trovato le sue motivazioni in alcune criticità che caratterizzano l'assegnazione di carico deterministico della rete [44]:

- l'instabilità, cioè la tendenza a produrre flussi significativamente diversi in risposta a lievi variazioni dei costi;
- l'inadeguatezza nel riprodurre il comportamento degli utenti, dal momento che nel caso di due percorsi con costo molto simile si osserva che entrambi hanno una probabilità non nulla di essere scelti;
- la presenza contemporanea di alcuni archi della rete molto carichi e di altri completamente scarichi.

L'assegnazione di carico stocastico della rete è regolata dal principio secondo il quale per ogni coppia origine-destinazione il *costo percepito*[17] dei percorsi utilizzati è minore o uguale del costo di ogni altro percorso. Essendo il modello di scelta del percorso probabilistico, i flussi sono anch'essi variabili aleatorie; nel seguito nei modelli stocastici col termine "flusso" si farà riferimento al valore medio di tale variabile aleatoria.

I flussi di arco nell'ipotesi di carico stocastico della rete, indicati col simbolo $\mathbf{f}_{SNL}$, si possono ottenere a partire dalle relazioni (1.1) e (1.2) relative all'offerta e dalla (1.9) relativa alla domanda. Si ottiene la cosiddetta *funzione di carico stocastico della rete* $\boldsymbol{f}_{SNL}(\bullet)$ che lega i flussi $\mathbf{f}_{SNL}$ ai vettori dei costi **c** e della domanda **d**. Trascurando i costi non additivi di percorso si perviene alla seguente espressione

$$\mathbf{f}_{SNL} = \boldsymbol{f}_{SNL}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}^T\mathbf{c})\, \mathbf{d} \quad \in S_f(\mathbf{d}) \;\forall\; \mathbf{c} \tag{1.16}$$

Nonostante la (1.16) sia in simboli identica alla (1.15), è necessario comunque tenere presente che l'espressione (1.16) è una funzione, cioè per ogni vettore dei costi restituisce univocamente un vettore dei flussi, mentre la (1.15) è una mappa è pertanto non è garantita

[17] Il costo percepito è l'opposto dell'utilità percepita.

l'univocità del vettore dei flussi. La differenza fra le due espressioni è originata dalla matrice **P** che è concettualmente diversa nei due casi. Un esempio di calcolo dei flussi di arco mediante la (1.16) è riportato nella Fig. 1.7, assumendo noti la matrice di incidenza archi-percorsi (Fig. 1.2), la matrice delle probabilità di scelta del percorso (Fig. 1.5) e il vettore di domanda (Fig. 1.1).

Si dice *matrice di assegnazione* **M** una matrice così definita

$$\mathbf{M} = \Delta\,\mathbf{P}$$

Tale matrice ha dimensione |L|×|RS|, cioè ha tante righe quanti sono gli archi e tante colonne quante sono le coppie origine-destinazione, ed il suo generico elemento $m_{rs,l}$ rappresenta la probabilità di attraversare l'arco l data la coppia origine-destinazione rs. Per mezzo di tale matrice la (1.16) può essere scritta come

$$\mathbf{f}_{SNL} = \boldsymbol{f}_{SNL}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \boldsymbol{M}(-\Delta^{T}\mathbf{c})\,\mathbf{d} \quad \in S_f(\mathbf{d})\ \forall\ \mathbf{c}$$

Qualsiasi sia il vettore dei costi considerato, se la rete è connessa esiste almeno una soluzione, cioè un vettore dei flussi $\mathbf{f}_{SNL}$ ottenuto per mezzo della (1.16). Tale soluzione è unica.

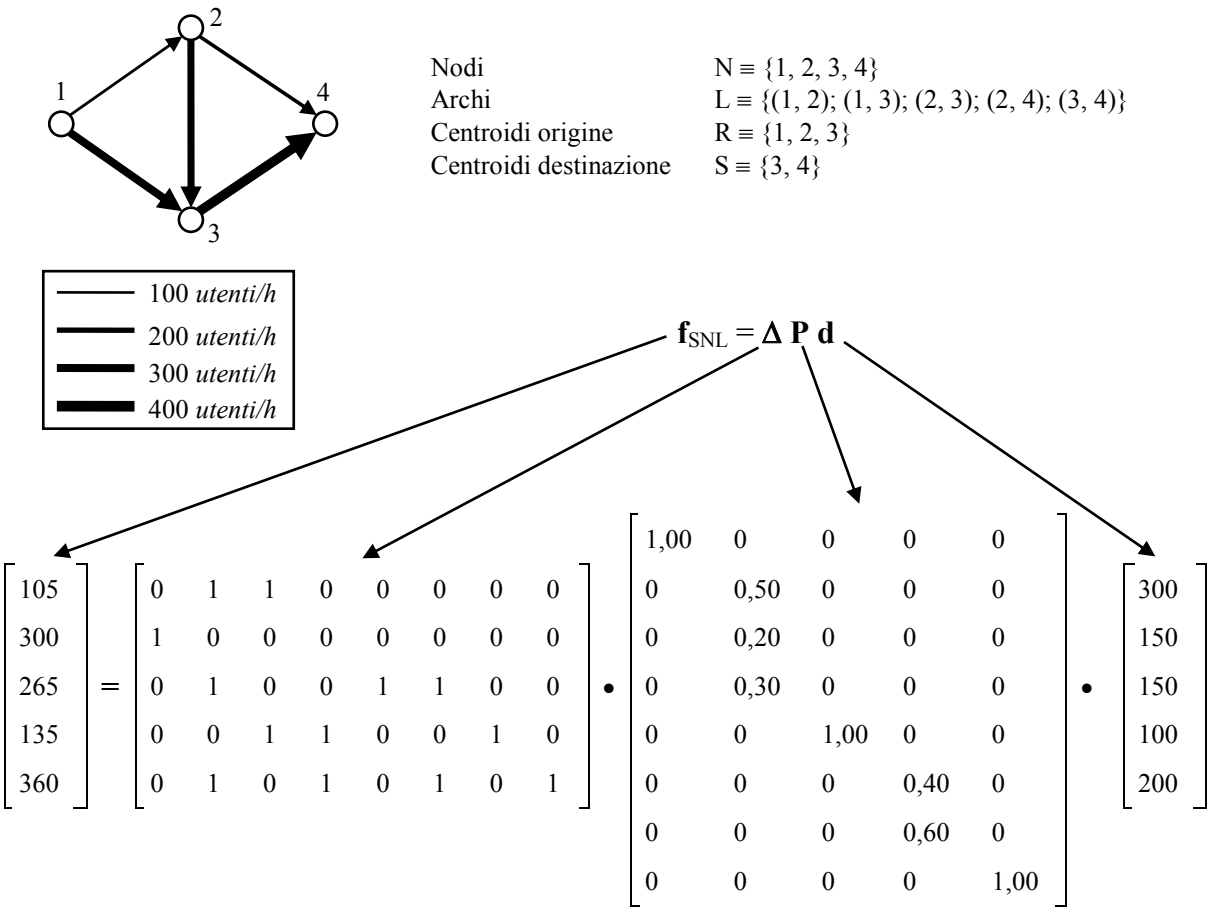



**Fig. 1.7 – Esempio di calcolo dei flussi di arco (assegnazione SNL)**

### 1.1.4.3. Assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti (DUE)

Se si assumono i costi di arco dipendenti dai flussi di arco e il modello di scelta del percorso deterministico si ottiene il modello di assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti.

Benché sia possibile formulare l'equilibrio deterministico come un problema di punto fisso, come sarà fatto in seguito per l'equilibrio stocastico (vedi paragrafo 1.1.4.4), tuttavia questo non è un approccio usualmente seguito perché comporta delle complicazioni matematiche dovute al fatto che il modello di carico della rete è espresso da una mappa uno a molti. Per questo motivo le proprietà dell'equilibrio deterministico sono usualmente studiate per mezzo di formulazioni indirette. Una di queste è la *disequazione variazionale* che si può ottenere generalizzando l'insieme di equazioni (1.13) scritte per il modello di assegnazione di carico della rete [36, 99]

$$\boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{DUE})^{T}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{DUE}) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{f} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.17}$$

L'esistenza e l'unicità dei flussi di equilibrio deterministico $\mathbf{f}_{DUE}$ sono garantite rispettivamente dalla continuità e dalla monotonicità delle funzioni di costo [18]. Le condizioni di esistenza ed unicità descritte sono solo condizioni sufficienti. Queste condizioni garantiscono a loro volta l'unicità dei costi di arco all'equilibrio $\mathbf{c}_{DUE}$, che si possono ottenere grazie alla (1.3) in corrispondenza dei flussi di arco equilibrio

$$\mathbf{c}_{DUE} = \boldsymbol{c}\,(\mathbf{f}_{DUE})$$

ed anche dei costi di percorso grazie alla (1.2), ma non dei flussi di percorso, dal momento che potrebbero esistere differenti vettori di flussi di percorso associati allo stesso vettore dei flussi di arco.

La disequazione variazionale (1.17) ha almeno una soluzione se le funzioni di costo sono continue e definite sull'insieme non vuoto (se la rete è connessa), compatto e convesso dei flussi di arco $S_f$. Infatti sotto queste ipotesi l'esistenza di almeno una soluzione può essere provata grazie al teorema di Brower.

La disequazione variazionale (1.17) ha al più una soluzione se le funzioni di costo sono strettamente crescenti nell'insieme dei flussi ammissibili di arco $S_f$

$$[\boldsymbol{c}(\mathbf{f}') - \boldsymbol{c}(\mathbf{f}'')]^{T}(\mathbf{f}' - \mathbf{f}'') > 0 \quad \forall\, \mathbf{f}' \neq \mathbf{f}'' \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.18}$$

Infatti, sotto queste ipotesi, è possibile dimostrare per assurdo che non possono esistere due vettori di flussi di equilibrio distinti.

Se lo Jacobiano delle funzioni di costo è simmetrico, il modello di assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti può anche essere formulato per mezzo di un modello di ottimizzazione [9]

$$\mathbf{f}_{DUE} = arg\ \min_{\mathbf{f}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{f}} \boldsymbol{c}(\mathbf{x})^{T}\, d\mathbf{x} \tag{1.19.a}$$

con

[18] La monotonicità di una funzione vettoriale di vettore si intende ora e nel seguito definita nel seguente modo: $[\ \varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{x}'')]^{T}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') > 0 \quad \forall\, \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$.

$$\mathbf{f} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.19.b}$$

dove il simbolo $\oint$ rappresenta l'integrale di linea. L'ipotesi che lo Jacobiano delle funzioni di costo sia simmetrico è necessaria affinché l'integrale di linea (1.19.a) sia indipendente dal percorso di integrazione secondo quanto stabilito dal teorema di Green. La continuità delle funzioni di costo e delle derivate prime, oltre alla simmetria dello Jacobiano, garantisce che la soluzione del problema di ottimizzazione (1.19) sia un vettore di equilibrio. Il viceversa è garantito solo se lo Jacobiano è semidefinito positivo.

#### 1.1.4.4. Assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti (SUE)

Se si assumono i costi dipendenti dai flussi e il modello di scelta del percorso probabilistico si ottiene il modello di assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti.

Il problema dell'equilibrio stocastico può essere formulato per mezzo di modelli di ottimizzazione [38, 50], oppure per mezzo di un modello di punto fisso [39]. Considerando questo ultimo approccio, i flussi di equilibrio stocastico $\boldsymbol{f}_{SUE}$ si possono ricavare da un modello di punto fisso ottenuto a partire dall'equazione (1.16) considerando il legame esistente fra il vettore dei costi di arco ed il vettore dei flussi di arco per mezzo della (1.3)

$$\mathbf{f}_{SUE} = \boldsymbol{f}_{SNL}(\boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}), \mathbf{d}) = \boldsymbol{\Delta}\, \boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}))\, \mathbf{d} \tag{1.20.a}$$

con

$$\mathbf{f}_{SUE} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.20.b}$$

L'esistenza e l'unicità dei flussi di equilibrio stocastico $\mathbf{f}_{SUE}$ sono garantite da condizioni del tutto analoghe a quelle descritte per l'equilibrio deterministico, assumendo inoltre che siano verificate delle ipotesi generali sul modello di scelta del percorso che garantiscano la continuità e monotonicità della funzione di carico stocastico della rete. Anche in questo caso, le condizioni di esistenza ed unicità descritte sono solo condizioni sufficienti. Queste condizioni garantiscono a loro volta l'unicità dei costi di arco all'equilibrio $\mathbf{c}_{SUE}$, che si possono ottenere grazie alla (1.3) in corrispondenza dei flussi di arco equilibrio

$$\mathbf{c}_{SUE} = \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE})$$

ed anche dei costi e dei flussi di percorso grazie rispettivamente alle (1.2) e (1.9).

Il modello di punto fisso (1.20) ha almeno una soluzione se la funzione di carico stocastico della rete è continua[19] e le funzioni di costo sono continue. Infatti, sotto queste ipotesi, la funzione composta (1.20.a) è una funzione continua definita su un insieme compatto, convesso e non vuoto (se la rete è connessa) $S_f$, che assume valori solo nell'insieme $S_f$, e pertanto soddisfa tutti i requisiti richiesti dal teorema di Brower.

[19] La funzione di carico stocastico della rete è continua se il modello di scelta del percorso è continuo. La continuità del modello di scelta del percorso è garantita dall'utilizzo di un modello di domanda probabilistico, cioè tale che $det(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \neq 0$.

Il modello di punto fisso (1.20) ha al più una soluzione se la funzione di carico stocastico della rete è monotona non crescente rispetto ai costi di arco[20] e le funzioni di costo sono strettamente crescenti nell'insieme dei flussi ammissibili di arco $S_f$, cioè se è soddisfatta la (1.18). Infatti, sotto queste ipotesi, è possibile dimostrare per assurdo che non possono esistere due vettori di equilibrio distinti. Una condizione sufficiente per la stretta monotonicità delle funzioni di costo è che la matrice Jacobiana del vettore delle funzioni di costo $\boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]$ sia definita positiva nell'insieme dei flussi ammissibili di arco $S_f$.

### 1.1.4.5. Assegnazione deterministica di ottimo di sistema (DSO)

L'assegnazione di ottimo di sistema si basa su ipotesi differenti rispetto a quelle dei modelli di assegnazione di equilibrio. Si ipotizza infatti che, al fine di minimizzare il costo totale del sistema, gli utenti cooperino fra di loro nella scelta del percorso, oppure che vi sia un gestore che imponga agli utenti il percorso da seguire[21]. Se oltre all'ipotesi precedente si assumono i costi dipendenti dai flussi si ottiene il modello di assegnazione deterministica di ottimo di sistema.

Tale modello di assegnazione è regolato dal *secondo principio di Wardrop* [111] che afferma che il costo totale di viaggio sulla rete è minimo[22].

L'assegnazione deterministica di ottimo di sistema è formulata per mezzo di un modello di ottimizzazione

$$\mathbf{f}_{DSO} = arg\ \min_{\mathbf{f}}\ \boldsymbol{c}(\mathbf{f})^T\mathbf{f} \tag{1.21.a}$$

con

$$\mathbf{f} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.21.b}$$

dove $\mathbf{f}_{DSO}$ è il vettore dei flussi ottenuti con tale tipo di assegnazione.

L'esistenza di almeno una soluzione del problema (1.21) è garantita dalla continuità delle funzioni di costo. Infatti in tal caso, considerando che l'insieme dei flussi ammissibili di arco $S_f$ è compatto e non vuoto (se la rete è connessa), è garantita l'esistenza di almeno un punto di minimo.

L'unicità (e l'esistenza) della soluzione è garantita dalle seguenti ipotesi:

- le derivate parziali delle funzioni di costo fino al secondo ordine sono continue;
- lo Jacobiano delle funzioni di costo $\boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]$ è definito positivo (cioè le funzioni di costo sono strettamente crescenti);
- la matrice Hessiana di ogni funzione di costo $\boldsymbol{Hess}[c_l(\mathbf{f})]$ è semidefinita positiva (cioè ogni funzione di costo è convessa).

Infatti il gradiente della funzione obiettivo (1.21.a) è

$$\nabla(\boldsymbol{c}(\mathbf{f})^T\mathbf{f}) = \boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]^T\mathbf{f} + \boldsymbol{c}(\mathbf{f}) \tag{1.22}$$

[20] La funzione di carico stocastico della rete è monotona non crescente rispetto ai costi di arco se il modello di scelta del percorso è una funzione monotona non decrescente delle utilità sistematiche. La monotonicità del modello di scelta del percorso è garantita dall'utilizzo di un modello di scelta del percorso additivo.

[21] L'ipotesi di un gestore che stabilisce i percorsi che gli utenti devono seguire è realistica nel caso di unità di domanda prive di una autonoma capacità di decisione, come nel caso dei veicoli adibiti al trasporto delle merci o al trasporto collettivo.

[22] L'enunciato originale è il seguente: "Il tempo medio di viaggio è minimo".

da cui, derivando ulteriormente, si ricava la matrice Hessiana

$$\boldsymbol{Hess}\left(\boldsymbol{c}(\mathbf{f})^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\right)=\boldsymbol{Jac}\left[\nabla\left(\boldsymbol{c}(\mathbf{f})^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\right)\right]=\boldsymbol{Jac}\left[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})\right]^{\mathrm{T}}+\sum_{l\in L}\mathrm{f}_l\boldsymbol{Hess}\left(c_l(\mathbf{f})\right)+\boldsymbol{Jac}\left[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})\right]$$

la quale per le ipotesi fatte è simmetrica e definita positiva e pertanto la funzione obiettivo (1.21.a) definita sull'insieme convesso $S_f$ è strettamente convessa e dunque ha uno ed un solo punto di minimo.

Le condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità assicurano anche che condizione necessaria è sufficiente affinché un vettore di flussi $\mathbf{f}_{DSO}$ sia soluzione del problema di minimizzazione (1.21) sia la seguente

$$\nabla(\boldsymbol{c}(\mathbf{f})^{\mathrm{T}}\mathbf{f})^{\mathrm{T}}(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{DSO})\geq 0 \quad \forall\ \mathbf{f}\in S_f(\mathbf{d})$$

la quale, considerando la (1.22), diviene

$$[\boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}+\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]^{\mathrm{T}}(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{DSO})\geq 0 \quad \forall\ \mathbf{f}\in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.23}$$

Confrontando la disequazione variazionale (1.17), che esprime il modello di assegnazione di equilibrio deterministico, con la (1.23) si evince che la differenza è data dal termine $\boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$. Pertanto se i costi di arco sono indipendenti dai flussi, cioè se $\boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]=\mathbf{0}$, allora i flussi di equilibrio deterministico coincidono con i flussi di ottimo di sistema deterministico (e con i flussi di carico deterministico della rete).

La disequazione variazionale (1.23) può essere interpretata come un modello di assegnazione di equilibrio deterministico con funzioni di costo modificate dall'aggiunta del termine $\boldsymbol{Jac}[\boldsymbol{c}(\mathbf{f})]^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$. Nel caso di funzioni di costo separabili ciò equivale a considerare come funzione di costo di ogni arco l una quantità $\varsigma_l$ data dalla seguente espressione

$$\varsigma_l(\mathrm{f}_l)=\frac{\partial c_l(\mathrm{f}_l)}{\partial \mathrm{f}_l}\mathrm{f}_l+c_l(\mathrm{f}_l)$$

Pertanto una configurazione di ottimo di sistema, relativamente al solo tempo di percorrenza, è ottenibile senza imporre il percorso agli utenti, ma semplicemente modificando i costi di arco. Un modo per introdurre tale variazione è quello di introdurre opportuni pedaggi. Il pedaggio infatti modifica il comportamento degli utenti, senza tuttavia introdurre un tempo aggiuntivo. Il pedaggio costituisce infatti uno scambio di quantità di denaro interno alla collettività, pertanto nonostante alcune categorie possono essere penalizzate da questi scambi ed altre avvantaggiate, nel complesso la collettività non subisce né un vantaggio né uno svantaggio.

### 1.1.4.6. Assegnazione stocastica di ottimo di sistema (SSO)

Nell'ipotesi in cui vi sia un gestore che imponga agli utenti il percorso da seguire al fine di minimizzare il costo totale sopportato da tutti gli utenti, è possibile considerare due possibili fonti di aleatorietà: la prima è associata al fatto che gli utenti potrebbero non seguire le indicazioni fornite dal gestore della rete; la seconda è associata al fatto che il gestore non ha una conoscenza esatta dei costi sulla rete. Nel seguito sarà considerata esclusivamente la seconda fonte di aleatorietà.

Sotto queste ipotesi è possibile formulare l'assegnazione stocastica di ottimo di sistema per mezzo di un modello di ottimizzazione di una funzione stocastica. Assumendo che il residuo aleatorio associato alla scelta del percorso sia scomponibile nella somma di più residui aleatori associati agli archi (come in effetti avviene se si utilizza un modello di scelta del percorso Probit) si ottiene

$$\mathbf{f}_{SSO} = arg\ \min_{\mathbf{f}} \left[\boldsymbol{c}(\mathbf{f}) + \boldsymbol{\eta}\right]^{T} \mathbf{f} \tag{1.24.a}$$

con

$$\mathbf{f} \in S_f(\mathbf{d}) \tag{1.24.b}$$

dove $\mathbf{f}_{SSO}$ è il vettore dei flussi ottenuti con tale tipo di assegnazione. A differenza del modello (1.21), nella (1.24.a) è presente il vettore $\boldsymbol{\eta}$ dei residui aleatori di arco (vedi paragrafo 1.2.3.1), che non dipende dai flussi, per l'ipotesi di additività del modello di scelta. Trattandosi di un modello aleatorio, la soluzione sarà un vettore di variabili aleatorie ma ci si potrebbe operativamente limitare ad individuarne un valore medio o un intervallo di confidenza.

In base alle ipotesi generali della teoria dell'utilità aleatoria, i residui aleatori sono scomponibili in due aliquote: la prima è l'incertezza associata alla non perfetta conoscenza dell'analista del sistema di trasporto, e la seconda è l'incertezza associata alla non perfetta conoscenza dell'utente del sistema del sistema di trasporto ed alla dispersione dei comportamenti di scelta fra i decisori. In questo caso si deve tenere conto soltanto della prima aliquota, poiché è stato assunto che gli utenti non scelgono autonomamente ma seguono le indicazioni fornite dal gestore.

## 1.2. Algoritmi

I modelli di simulazione dell'interazione fra il sistema di domanda e quello di offerta richiedono delle procedure operative per essere risolti, cioè per ottenere il vettore dei flussi di arco e quello dei costi di arco. Tali procedure sono note come *algoritmi di assegnazione*.

In questo paragrafo vengono descritti i più noti algoritmi di assegnazione per ottenere i flussi di arco utilizzando i modelli di assegnazione presentati nel paragrafo 1.1.4. La descrizione non pretende di essere un'esposizione dettagliata tale da consentire una immediata implementazione degli stessi, ma piuttosto si limita a esporre i principi di funzionamento ed i passi fondamentali degli algoritmi. Inoltre la descrizione spesso privilegia la semplicità e la chiarezza espositiva rispetto all'approfondimento di quegli aspetti che possono consentire una maggiore efficienza degli algoritmi stessi.

Nel paragrafo 1.2.1 sono descritti gli *algoritmi per la ricerca dei minimi percorsi*, che servono per individuare i minimi percorsi congiungenti i centroidi origine dello spostamento ed i centroidi destinazione; tali algoritmi sono alla base di tutti gli algoritmi di assegnazione e vengono richiamati più volte all'interno di essi. Nei paragrafi 1.2.2 e 1.2.3 sono descritti gli algoritmi per risolvere i modelli di assegnazione di carico della rete, rispettivamente nel caso deterministico e nel caso stocastico. Nei paragrafi 0 e 1.2.5 sono descritti gli algoritmi per risolvere i modelli di assegnazione di equilibrio degli utenti, rispettivamente nel caso deterministico e nel caso stocastico. Il modello di ottimo di sistema deterministico può essere risolto considerando gli algoritmi descritti nel paragrafo 0, dal momento che esso può essere interpretato come un modello di assegnazione di equilibrio deterministico con funzioni di costo opportunamente modificate.

### 1.2.1. Algoritmi per la ricerca dei minimi percorsi

In molti problemi dell'ingegneria dei trasporti è necessario risolvere il problema della ricerca dei *minimi percorsi*, cioè dei percorsi aciclici di costo minimo in una rete con costi di arco positivi. Si tratta di ricercare i minimi percorsi rispetto ad uno o più possibili criteri (ad esempio: lunghezza, tempo, costo) fra alcune coppie origine-destinazione, o più in generale di ricercare un insieme di minimi percorsi (ad esempio: i primi k, quelli che differiscono non più di un $\alpha$% dal minimo percorso, quelli non dominati rispetto ad un insieme di criteri). Talvolta la ricerca è vincolata da vincoli addizionali (ad esempio finestre temporali) o è effettuata su grafi con strutture particolari. Nel seguito sono trattati esclusivamente gli algoritmi per individuare un unico minimo percorso su grafi ordinari senza vincoli addizionali, e si rimanda alla vasta letteratura esistente per gli altri metodi [25, 82, 93].

Gli algoritmi si possono classificare in funzione del numero e del tipo di nodi fra i quali sono calcolati i minimi percorsi:

- fra due nodi;
- fra un nodo ed un sottoinsieme dei rimanenti;
- fra tutti i nodi.

Gli algoritmi di gran lunga più utilizzati per la simulazione di un sistema di trasporto sono quelli che effettuano il calcolo dei minimi percorsi fra un nodo, che si assume essere un centroide origine r, ed un sottoinsieme dei rimanenti, che si assume essere l'insieme dei centroidi destinazione S. Tali algoritmi vengono definiti *arborescenti*, in quanto restituiscono in output un *albero dei minimi percorsi*, cioè un sottografo seguendo il quale dalla radice alle foglie è possibile risalire al minimo percorso che congiunge il centroide origine r ad un generico centroide destinazione s. Tale albero dei minimi percorsi si dice *in avanti*, mentre se si sceglie come nodo radice un centroide destinazione s, congiungendolo all'insieme dei centroidi origine R, si ottiene un albero dei minimi percorsi *in indietro*. Nella rappresentazione delle reti i centroidi origine e destinazione relativi alla stessa zona sono sempre rappresentati con due nodi differenti (non collegati fra loro) al fine di evitare che vi siano percorsi che attraversino tali centroidi. Un esempio di albero dei minimi percorsi in avanti è illustrato nella figura Fig. 1.8[23].

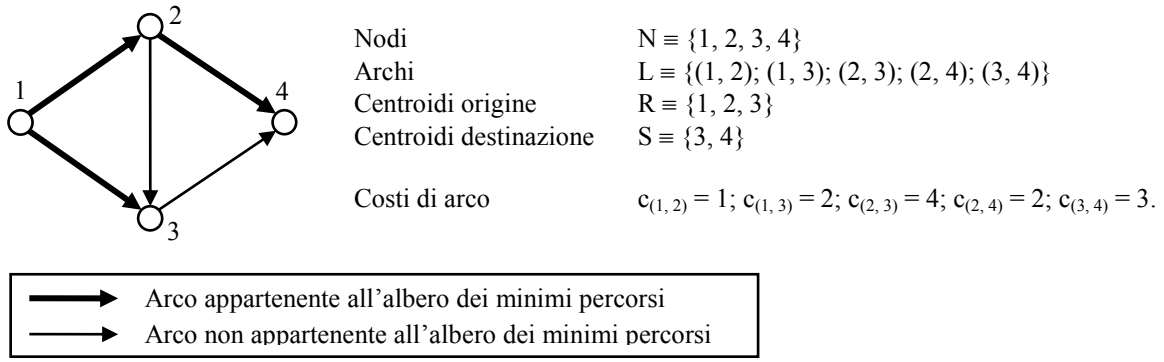



**Fig. 1.8 – Esempio di albero dei minimi percorsi in avanti**

L'utilizzo di algoritmi arborescenti per la ricerca dei minimi percorsi fra tutte le coppie di nodi centroidi della rete consente di calcolare per ogni origine r un albero dei minimi percorsi in avanti $T_r^*$ (oppure per ogni destinazione s un albero dei minimi percorsi in indietro $T_s^*$). Da questi alberi è possibile ricavare il minimo percorso che collega due qualsiasi centroidi origine e destinazione. Tutti gli algoritmi per il calcolo di $T_r^*$ sono di tipo iterativo: ad ogni iterazione è calcolato un albero $T_r$ che viene modificato fino a farlo coincidere con $T_r^*$. Il fondamento teorico di questi algoritmi è il *teorema di Bellman* [13] secondo il quale, detti $c_{r\to i}$ e $c_{r\to j}$ i costi necessari per raggiungere i nodi i e j dalla radice r con l'unico percorso consentito da un generico albero di radice r, condizione necessaria e sufficiente affinché un albero $T_r$ di radice r sia l'albero dei minimi percorsi $T_r^*$ è che per ogni coppia di nodi (i, j) collegati da un arco appartenente al grafo esaminato si verifichi la condizione triangolare

$$c_{r\to j} - c_{r\to i} \leq c_{(i,\,j)} \tag{1.25}$$

I più diffusi fra gli algoritmi arborescenti hanno una struttura comune: essi partono da un albero iniziale relativo ad una rete modificata mediante l'introduzione di archi fittizi di

[23] Si tenga conto che la figura illustra una situazione semplificata in cui i centroidi sono collocati in coincidenza di nodi reali

costo infinito che collegano la radice r direttamente con tutti i nodi[24]. Ad ogni iterazione viene esaminato un nodo i della rete e, per tutti gli archi della stella in uscita da i (cioè l'insieme degli archi che hanno come primo nodo i), viene verificata la condizione (1.25). Se il generico arco (i, j) appartenente alla stella non soddisfa la condizione (1.25) allora il percorso seguito per raggiungere j dalla radice nell'albero corrente non è certamente quello di minimo costo e pertanto esso viene sostituito con quello formato dal percorso che collega la radice con il nodo i e dall'arco (i, j), il costo $c_{r\to j}$ per raggiungere j con il percorso così generato viene aggiornato ponendo

$$c_{r\to j} = c_{r\to i} + c_{(i,\,j)}$$

Alla fine di ogni iterazione i nodi per i quali è stato corretto il percorso ed il costo vengono posti in un insieme dal quale viene estratto il nodo da esaminare nell'iterazione successiva.

Gli algoritmi possono essere classificati in funzione del modo in cui essi gestiscono la l'insieme dei nodi da esaminare:

- quelli che selezionano sempre dall'insieme il nodo che ha la minima distanza (nell'albero corrente) sono detti di tipo *label setting* (o *shortest-first search*);
- quelle che invece non seguono questa strategia sono detti di tipo *label correcting* (o *shortest-first search*).

Gli algoritmi di tipo label setting analizzano ciascun nodo una ed una sola volta e richiedono quindi di ordinare l'insieme dei nodi da analizzare. Il primo algoritmo proposto di questo tipo è l'algoritmo di *Dijkstra* [45], in cui l'insieme dei nodi è implementato per mezzo di una lista semplice; esso è caratterizzato da una complessità computazionale asintotica[25] $O(|N|^2)$. Gli altri algoritmi proposti si differenziano dall'algoritmo di Dijkstra per la diversa implementazione dell'insieme dei nodi da analizzare. Ad esempio l'algoritmo *S-heap* [65] utilizza un heap binario[26] ed è caratterizzato da una complessità computazionale asintotica $O(|L|\cdot log|N|)$.

Gli algoritmi di tipo label correcting non garantiscono che ciascun nodo venga analizzato una sola volta e non richiedono l'ordinamento dei nodi. Tali algoritmi si differenziano fra loro per la strategia di analisi dei nodi. Ad esempio l'algorimo *L-queue* [13] utilizza una strategia FIFO[27], ed è caratterizzato da una complessità computazionale asintotica è $O(|M|\cdot|N|)$. Invece l'algoritmo *L-deque* [84] utilizza una lista a due estremi: una coda, nella quale vengono inseriti i nodi analizzati per la prima volta, ed una testa, nella quale vengono inseriti i nodi già analizzati in precedenza e dalla quale vengono estratti i nodi da esaminare. La complessità computazionale asintotica è $O(|N|\cdot 2^{|N|})$ nel caso peggiore, ma in pratica esso è molto efficiente se applicato a grafi sparsi[28], che sono caratteristici dei sistemi di trasporto.

Poiché solitamente gli algoritmi per il calcolo dei minimi percorsi costituiscono la procedura più interna degli algoritmi di assegnazione, richiamata il maggior numero di volte, è evidente che è altamente desiderabile disporre della massima efficienza in termini sia di impiego di memoria, sia soprattutto di velocità di esecuzione. Non esiste un

[24] Gli archi fittizi saranno certamente eliminati negli alberi successivi generati dall'algoritmo, a meno che la rete sia non connessa.
[25] In questo paragrafo la complessità computazionale è riferita al tempo di calcolo.
[26] L'heap binario è un albero binario in cui qualunque percorso uscente dalla radice ha i nodi in ordine crescente di costo.
[27] Cioè "First In, First Out": i nodi vengono analizzati nell'ordine in cui vengono inseriti nella lista.
[28] Un grafo si dice sparso se $|L| << |N|^2$.

algoritmo ideale, cioè che presenti le migliori caratteristiche in ogni contesto: il comportamento degli algoritmi è altamente influenzato dalla struttura del grafo e dalle sue dimensioni. Inoltre deve essere considerato che gli algoritmi di tipo label setting, a differenza di quelli di tipo label correcting, sono in grado di restituire i nodi dell'albero ordinati per costo crescente, ed è questa una caratteristica vantaggiosa poiché consente di applicare algoritmi di carico della rete più efficienti (vedi paragrafo 1.2.2). Il confronto fra differenti algoritmi non è facilmente riproducibile, sia per quanto già detto a proposito dell'influenza della struttura e della dimensione del grafo, sia perché l'efficienza degli algoritmi dei minimi percorsi è altamente influenzata dalle strutture dati utilizzate [104].

Poiché gli algoritmi di assegnazione richiedono la soluzione di molteplici problemi di ricerca di minimi percorsi spesso simili fra loro, sarebbe utile poter sfruttare la soluzione del problema precedente per individuare in maniera efficiente la soluzione del problema successivo. Tale modo di procedere è detto *riottimizzazione dei minimi percorsi*, ed allo stato attuale è solo un campo di ricerca. Alcuni dei metodi proposti consentono di ricalcolare l'albero dei minimi percorsi quando la radice varia [53], mentre altri quando varia il costo di un sottoinsieme di archi [83].

### 1.2.2. Algoritmi di assegnazione di carico deterministico della rete (DNL)

Gli algoritmi di assegnazione di carico della rete, sia quelli deterministici (trattati in questo paragrafo) che quelli stocastici (trattati nel paragrafo 1.2.3), si possono suddividere in due grandi classi:

- algoritmi di assegnazione con *enumerazione esplicita dei percorsi*, con i quali per ogni coppia origine-destinazione vengono identificati i percorsi appartenenti all'insieme di scelta e per ciascuno di essi è calcolato il costo di percorso e successivamente la probabilità di scelta del percorso;
- algoritmi di assegnazione con *enumerazione implicita dei percorsi*, con i quali, nell'ipotesi di assenza di costi di percorso non additivi, per ogni coppia origine-destinazione è possibile calcolare i flussi di arco senza identificare esplicitamente i percorsi, utilizzando procedure basate sugli algoritmi dei minimi percorsi.

La prima classe di algoritmi non merita particolare approfondimento poiché, una volta individuato l'insieme di scelta[29], il calcolo delle probabilità di scelta avviene applicando il modello di scelta deterministico o stocastico utilizzato. La seconda classe di algoritmi è invece approfondita nel seguito.

In questo paragrafo sono descritti gli algoritmi che servono a risolvere il modello di assegnazione di carico deterministico della rete (DNL), nel quale si assumono i costi indipendenti dai flussi e il modello di scelta del percorso deterministico.

Sotto queste ipotesi, se esistono più percorsi di costo minimo per qualche coppia origine-destinazione allora i flussi di tali percorsi, e di conseguenza degli archi, non sono univocamente definiti. Tuttavia gli algoritmi di calcolo degli alberi dei percorsi di minimo costo forniscono un unico percorso fra ciascuna coppia origine-destinazione, che dipende

[29] L'insieme di scelta viene solitamente individuato tenendo conto dei primi k minimi percorsi, oppure di quelli che differiscono non più di un $\alpha$% dal minimo percorso, oppure dei minimi percorsi calcolati rispetto a differenti criteri (tempo di viaggio, costo monetario, etc.).

dalle modalità di implementazione dell'algoritmo e dalla numerazione dei nodi. Il vettore dei flussi di arco può quindi essere calcolato assegnando tutto il flusso di domanda di ogni coppia origine-destinazione agli archi del minimo percorso che la collega (e flusso nullo agli altri archi) e sommando per tutte le coppie origine-destinazione, con algoritmi detti appunto *Tutto o Niente* (*All or Nothing*).

Tali algoritmi possono suddividersi in quattro tipi:

- *sequenziale in avanti*, in cui per ciascuna origine r, dopo aver calcolato l'albero dei minimi percorsi $T_r$*, si somma la domanda $d_{rs}$ verso ciascuna destinazione s ai flussi su tutti gli archi del minimo percorso da r a s;
- *sequenziale in indietro*, che procede in modo del tutto analogo al precedente analizzando una destinazione s per volta, caricando i flussi sui percorsi dell'albero in indietro $T_s$*;
- *simultaneo in avanti*, in cui per ciascuna origine r, dopo aver calcolato l'albero dei minimi percorsi $T_r$*, si assegna la domanda $d_{rs}$ a ciascuna destinazione s (foglia dell'albero) e si caricano i rami appartenenti all'albero $T_r$* partendo dai nodi più lontani verso la radice r, sommando i flussi convergenti nei nodi di diramazione dell'albero (tale algoritmo si basa sul calcolo del flusso originato da una generica origine r entrante in ogni nodo n, indicato con $\dot{f}_{n,r}$ e definito come somma dei flussi sugli archi in ingresso al nodo stesso);
- *simultaneo in indietro*, che procede in modo del tutto analogo al precedente analizzando una destinazione s per volta, caricando i flussi a partire dai nodi più lontani verso la radice s dell'albero in indietro $T_s$*.

L'unica differenza fra gli algoritmi in avanti e quelli in indietro è che i primi richiedono l'utilizzo di algoritmi per il calcolo dei minimi percorsi in avanti (una volta per ciascuna origine), mentre i secondi richiedono l'utilizzo di algoritmi per il calcolo dei minimi percorsi in indietro (una volta per ciascuna destinazione). Poiché generalmente in una rete di trasporto il numero di origini e di destinazioni e uguale, o almeno molto simile, non vi è alcuna differenza in termini di tempo di calcolo nell'utilizzo di uno o dell'altro tipo di algoritmi. Qualora vi sia una significativa differenza fra il numero delle origini e quello delle destinazioni (come ad esempio nel caso dell'evacuazione di un'area territoriale [94]) allora risulta conveniente l'utilizzo dell'uno o dell'altro tipo di algoritmi.

Più sostanziali sono le differenze fra gli algoritmi sequenziali e quelli simultanei. L'applicazione degli algoritmi simultanei è maggiormente efficiente ma richiede che, per ciascun albero dei minimi percorsi, sia disponibile una lista dei nodi ordinata secondo il costo necessario per raggiungere il nodo dalla radice. Questo ordinamento è ottenibile facilmente applicando algoritmi di tipo label setting per il calcolo degli alberi dei minimi percorsi. Utilizzando un algoritmo simultaneo, data una origine (o una destinazione) si effettuano, indipendentemente dalla struttura dell'albero, due addizioni per ciascun arco nell'albero dei minimi percorsi, ossia $2(|N| - 1)$ addizioni. Invece, utilizzando un algoritmo sequenziale il numero delle addizioni effettuate dipende dalla struttura dell'albero dei minimi percorsi: esso risulta compreso tra il numero degli archi nell'albero, $|N| - 1$, nel caso che i percorsi all'interno dell'albero non presentino alcuna sovrapposizione, e il valore $|S|\cdot(|N| - |S|)$ nel caso di massima sovrapposizione.

Uno schema dell'algoritmo sequenziale in avanti è riportato nella Fig. 1.9; uno schema dell'algoritmo simultaneo in vanti è riportato nella Fig. 1.10.

```
Per ogni l ∈ L
   f_l := 0
Per ogni r ∈ R
{
   Calcola l'albero dei minimi percorsi T_r*
   Per ogni s ∈ S
   {
      n := s
      Ripeti
      {
         Poni l pari all'arco dell'albero T_r* che ha come nodo finale n
         f_l := f_l + d_rs
         Poni n pari al nodo iniziale dell'arco l
      }
      finchè n = r
   }
}
```

**Fig. 1.9 – Schema dell'algoritmo di carico deterministico della rete sequenziale in avanti**

```
Per ogni l ∈ L
   f_l := 0
Per ogni r ∈ R
{
   Calcola l'albero dei minimi percorsi T_r*
   Per ogni n ∈ (N – S)
      ḟ_n := 0
   Per ogni s ∈ S
      ḟ_s := d_rs
   i := |N|
   Ripeti
   {
      Poni n pari all'i-esimo nodo in ordine di costo dall'origine nell'albero T_r*
      i := i – 1
      Poni l pari all'arco dell'albero T_r* che ha come nodo finale n
      f_l := f_l + ḟ_n
      Poni n' pari al nodo iniziale dell'arco l
      ḟ_n' := ḟ_n' + ḟ_n
   }
   finchè i = 1
}
```

**Fig. 1.10 – Schema dell'algoritmo di carico deterministico della rete simultaneo in avanti**

## 1.2.3. Algoritmi di assegnazione di carico stocastico della rete (SNL)

In questo paragrafo sono descritti gli algoritmi che servono a risolvere il modello di assegnazione di carico stocastico della rete, nel quale si assumono i costi indipendenti dai flussi e il modello di scelta del percorso stocastico.

Gli algoritmi proposti si differenziano essenzialmente per il modello di scelta del percorso utilizzato. I modelli di scelta più utilizzati sono il modello Probit, trattato nel paragrafo 1.2.3.1, ed i modelli Logit Multinomiale e C-Logit, trattati nel paragrafo 1.2.3.2.

### 1.2.3.1. Modello di scelta del percorso Probit

Il modello di scelta del percorso Probit consente di tenere conto della sovrapposizione dei percorsi introducendo una covarianza tra le utilità percepite di due percorsi con archi in comune. L'ipotesi più frequentemente utilizzata [41] prevede che i residui aleatori delle utilità di percorso siano distribuiti secondo una variabile Normale multivariata a media nulla con matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori di percorso definita dalle (1.10.a) e (1.10.b). Si assume inoltre che l'insieme di scelta sia costituito da tutti i percorsi aciclici che connettono l'origine e la destinazione dello spostamento.

Si può dimostrare che tale distribuzione dei residui aleatori di percorso equivale ad introdurre un vettore dei residui aleatori di arco $\boldsymbol{\eta}$ indipendenti fra loro, il cui generico elemento $\eta_l$ è distribuito secondo una variabile Normale univariata di media nulla e varianza $\xi c_l$. Può essere definito un vettore dei costi di arco percepiti $\tilde{\mathbf{c}}$ definito come la somma del vettore dei costi di arco (o meglio del vettore dei valori medi dei costi di arco) e del vettore dei residui aleatori di arco

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \boldsymbol{\eta}$$

Stime non distorte delle probabilità di scelta del percorso e dei corrispondenti flussi di percorso e di arco possono essere ottenute utilizzando una tecnica di campionamento Monte Carlo[30]. È possibile utilizzare un algoritmo [97] che non richiede l'enumerazione esplicita dei percorsi e si basa su reiterati calcoli dei flussi di arco, ciascuno effettuato applicando modelli di carico deterministico della rete nei quali si utilizza come vettore dei costi di arco un'estrazione del vettore dei costi di arco percepiti. I flussi di arco ottenuti ad ogni iterazione col modello di carico deterministico della rete sono mediati per ottenere i flussi di arco di carico stocastico. Questo algoritmo, spesso indicato in letteratura come algoritmo *Probit - Monte Carlo* con riferimento alla tecnica utilizzata, a differenza di altri algoritmi descritti per risolvere il problema di assegnazione di carico deterministico della rete, non fornisce il valore dei flussi di arco, ma soltanto una sequenza di stime non distorte, la cui precisione aumenta con il numero di iterazioni. Nella pratica l'algoritmo procede finché una condizione di arresto non è verificata, ad esempio un preassegnato numero massimo di iterazioni $i_{max}$. Il tempo necessario per l'esecuzione dell'algoritmo è $i_{max}$ volte più grande di quello necessario per effettuare un carico deterministico della rete. Uno schema dell'algoritmo è riportato nella Fig. 1.11.

[30] Grazie al fatto che i residui aleatori di percorso sono equivalenti ad una distribuzione di residui di arco indipendenti fra loro, nel contesto della scelta del percorso è possibile, a differenza del caso generale, generare in maniera casuale i residui aleatori senza tuttavia ricorrere alla fattorializzazione della matrice di varianza-covarianza che è particolarmente onerosa computazionalmente (vedi nota 8 a pagina 5).

```
Per ogni l ∈ L
   f_l := 0
i := 0
Ripeti
{
   k = k + 1
   Estrai in maniera casuale il vettore dei residuialeatori di arco η
   c̃ = c + η
   f_DNL := f_DNL( c̃ , d)
   f := (f_DNL + (i - 1)f ) / i
}
finchè i = i_max
```

**Fig. 1.11 – Schema dell'algoritmo di carico stocastico della rete Probit - Monte Carlo**

### 1.2.3.2. Modello di scelta del percorso Logit

Nel caso di un modello di scelta del percorso Logit Multinomiale non è possibile tenere conto della sovrapposizione dei percorsi, ma è possibile calcolare il vettore dei flussi di arco senza ricorrere a metodi di simulazione. Per determinare i flussi sugli archi senza enumerare esplicitamente i percorsi è possibile utilizzare l'*algoritmo di Dial* [44].

L'applicazione dell'algoritmo di Dial richiede che l'insieme dei percorsi considerati sia costituito solo dai cosiddetti *percorsi efficienti rispetto all'origine* e/o dai *percorsi efficienti rispetto alla destinazione*. I primi sono costituiti da quei percorsi costituiti da archi percorrendo i quali ci si allontana dall'origine; cioè dato un generico arco (n', n") esso può appartenere ad un percorso efficiente rispetto all'origine r se si verifica la seguente condizione

$$c_{r\to n'} < c_{r\to n''} \tag{1.26}$$

dove $c_{r\to n'}$ e $c_{r\to n''}$ sono rispettivamente i costi per raggiungere i nodi n' e n" dall'origine r seguendo l'albero dei minimi percorsi. I secondi sono costituiti da quei percorsi costituiti da archi percorrendo i quali ci si avvicina a destinazione; cioè dato un generico arco (n', n") esso può appartenere ad un percorso efficiente rispetto alla destinazione s se si verifica la seguente condizione

$$c_{n'\to s} > c_{n''\to s}$$

dove $c_{n'\to s}$ e $c_{n''\to s}$ costo per raggiungere dal nodo n la destinazione s seguendo l'albero dei minimi percorsi. I percorsi appartenenti agli alberi dei minimi percorsi sono sicuramente efficienti rispetto sia alle origini che alle destinazioni, e pertanto per ogni coppia origine-destinazione è garantita l'esistenza di almeno un percorso efficiente.

In definitiva è possibile considerare tre possibili insiemi di scelta, e cioè quello costituito dai percorsi efficienti rispetto all'origine, quello costituito dai percorsi efficienti rispetto alla destinazione e quello costituito dai *percorsi doppiamente efficienti*, cioè efficienti rispetto sia all'origine che alla destinazione. Nel seguito per brevità si considererà solo il caso dei percorsi efficienti rispetto all'origine.

La determinazione dei percorsi efficienti può essere effettuata considerando come grandezza associata all'arco invece del costo di arco un qualsiasi altro attributo positivo, ad

esempio la lunghezza o il costo a flusso nullo. L'utilizzo di grandezze indipendenti dalla congestione è rilevante quando la funzione di carico stocastico della rete è utilizzata per la definizione di un modello di equilibrio stocastico degli utenti poiché garantisce la condizione sufficiente per l'unicità dell'equilibrio (vedi paragrafo 1.1.4.4) e la convergenza degli algoritmi di equilibrio stocastico (vedi paragrafo 1.2.5).

La (1.11), che fornisce la probabilità di scegliere il percorso k per gli utenti che si spostano dalla origine r alla destinazione s, può essere riscritta esprimendo il costo di percorso in funzione dei costi di arco secondo la (1.2) ottenendo la seguente espressione

$$p_{rs,k} = \frac{\prod_{(n',n'')\in k} exp\left(-c_{(n',n'')}/\vartheta\right)}{\sum_{k'\in K_{rs}} exp\left(g_{k'}/\vartheta\right)} \tag{1.27}$$

Se si considera ciascun percorso come una sequenza di nodi n", e di archi (n', n"), la probabilità $p_{rs,k}$ può essere espressa come il prodotto delle probabilità, pr[(n', n") | n"], di scegliere ciascun arco (n', n") del percorso k condizionata all'attraversamento del nodo finale n"

$$p_{rs,k} = \prod_{(n',n'')\in k} pr\left[(n',n'')\middle| n''\right] \tag{1.28}$$

La (1.28) è equivalente alla (1.27) se la probabilità pr[(n', n") | n"] è definita mediante un modello Logit di parametro $\vartheta$, in cui le alternative sono costituite dagli archi appartenenti alla stella in ingresso del nodo n" (cioè l'insieme degli archi che hanno come ultimo nodo n") che soddisfano la (1.26). L'utilità sistematica di ciascuna alternativa (i, j) è data dalla somma dell'opposto del costo $c_{(n', n")}$ dell'arco e di una variabile di soddisfazione che tiene conto delle utilità di tutti i percorsi efficienti dal nodo origine r al nodo iniziale n' dell'arco.

Sotto queste ipotesi la probabiltà pr[(n', n") | n"] può essere espressa dal rapporto fra il *peso dell'arco* (n', n"), indicato con $\hat{w}_{(n', n")}$, ed il *peso del nodo* n", indicato con $\hat{W}_{n"}$, cioè

$$pr\left[(n',n'')\middle| n''\right] = \frac{\hat{w}_{(n',n'')}}{\hat{W}_{n''}} \tag{1.29}$$

Il peso di un generico arco (n', n") può essere calcolato in funzione del costo dell'arco e del peso del nodo iniziale dell'arco stesso

$$\hat{w}_{(n',n'')} = \begin{cases} \hat{W}_{n'}\, exp\left(-c_{(n',n'')}/\vartheta\right) & \text{se } c_{r\to n'} < c_{r\to n''} \\ 0 & \text{se } c_{r\to n'} \geq c_{r\to n''} \end{cases} \tag{1.30}$$

mentre il peso del generico nodo n" può essere calcolato noti i pesi di arco di tutti gli archi della stella in ingresso del nodo stesso,

$$\hat{W}_{n''} = \sum_{(n',n'')\in BS(n'')} \hat{w}_{(n',n'')} \tag{1.31}$$

dove *BS*(•) è una funzione che restituisce l'insieme degli archi appartenenti alla stella in ingresso di un dato nodo.

Le (1.30) e (1.31) consentono di calcolare i pesi degli archi e dei nodi partendo da una data origine ed allontanandosi progressivamente da essa, mentre la (1.29) consente di ripartire i flussi partendo dai nodi più lontani dall'origine considerata ed avvicinandosi progressivamente ad essa. Su questo principio si basa l'algoritmo di Dial, il cui schema è riportato nella Fig. 1.12.

```
Per ogni l ∈ L
   f_l := 0
Per ogni r ∈ R
{
   Ŵ_r := 1
   Calcola l'albero dei minimi percorsi T_r*
   i := 1
   Ripeti
   {
      i := i + 1
      Poni n'' pari all'i-esimo nodo in ordine di costo dall'origine nell'albero T_r*
      Ŵ_n'' := 0
      Per ogni (n', n'') ∈ BS(n'')
      {
         Se c_r→n' < c_r→n'' allora
         {
            ŵ_(n', n'') := Ŵ_n' exp(-c_(n', n'')/ ϑ )
            Ŵ_n'' := Ŵ_n'' + ŵ_(n', n'')
         }
         altrimenti
            ŵ_(n', n'') := 0
      }
   }
   finchè i = |N|
   Per ogni n ∈ (N – S)
      ḟ_n := 0
   Per ogni s ∈ S
      ḟ_s := d_rs
   i := |N|
   Ripeti
   {
      Poni n pari all'i-esimo nodo in ordine di costo dall'origine nell'albero T_r*
      i := i – 1
      Per ogni (n', n'') ∈ BS(n'')
      {
         f_(n', n'') := f_(n', n'') + ḟ_n'' (ŵ_(n', n'') / Ŵ_n'')
         ḟ_n' := ḟ_n' + ḟ_n'' (ŵ_(n', n'') / Ŵ_n'')
      }
   }
   finchè i = 1
}
```

**Fig. 1.12 – Schema dell'algoritmo di carico stocastico della rete di Dial**

Tale algoritmo può essere adattato al caso in cui il modello di scelta del percorso e di tipo C-Logit, assumendo che sia utilizzata un'opportuna specificazione del fattore di sovrapposizione.

## 1.2.4. Algoritmi di assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti (DUE)

L'individuazione dei flussi di equilibrio deterministico nel caso di funzioni di costo separabili è basata sulla soluzione del modello di ottimizzazione (1.19). Tale modello individua un problema di ottimizzazione di una funzione non lineare convessa su un insieme $S_f(\mathbf{d})$ delimitato da vincoli lineari.

Per risolvere questo problema è stato proposto [64] l'utilizzo dell'*algoritmo di Frank-Wolfe*, che ad ogni iterazione i genera un vettore dei flussi ammissibili di arco $\mathbf{f}^{(i)}$ partendo da una soluzione ammissibile iniziale, $\mathbf{f}^{(0)}$. L'algoritmo converge verso il vettore dei flussi di equilibrio $\mathbf{f}_{DUE.}$

Ad ogni iterazione viene risolto un problema lineare che approssima il problema (1.19). Indicata con $\varphi(\mathbf{f})$ la funzione obiettivo della (1.19) la sua approssimazione lineare nel punto $\bar{\mathbf{f}}$ è

$$\varphi(\bar{\mathbf{f}}) + \nabla\varphi(\bar{\mathbf{f}})^T(\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}})$$

che, trascurando i termini costanti e considerando che l'integrazione e la derivazione sulle stesse variabili sono operazioni che si annullano a vicenda, diviene $\boldsymbol{c}\left(\bar{\mathbf{f}}\right)^T\mathbf{f}$. Considerando quest'ultima come funzione obiettivo si ottiene un modello che è formalmente simile al (1.14) e pertanto la sua soluzione è un vettore dei flussi di carico deterministico della rete, indicato con $\mathbf{f}_{DNL}{}^{(i)}$ alla generica iterazione i, coincidente con un vertice del poliedro $S_f(\mathbf{d})$.

Il nuovo punto sarà individuato lungo la direzione che congiunge il punto corrente con tale vertice, calcolando il passo di spostamento ottimale $\mu^*$ con un algoritmo di ricerca lineare [7].

La condizione di arresto prevede che il prodotto scalare fra il gradiente e la direzione di spostamento, reso adimensionale, sia inferiore ad una prefissata soglia $\omega$.

Uno schema dell'algoritmo è riportato nella Fig. 1.13.

```
i := 0
f^(0) := f_DNL(c(f = 0))
Ripeti
{
    i := i + 1
    c^(i) := c(f^(i-1))
    f_DNL^(i) := f_DNL(c^(i))
    μ* := arg min_μ∈[0,1] φ(f^(i-1) + μ( f_DNL^(i) - f^(i-1)))
    f^(i) := f^(i-1) + μ*( f_DNL^(i) - f^(i-1))
}
finchè |(c^(i))^T( f_DNL^(i) - f^(i-1))| / ( (c^(i))^T f^(i-1)) < ω
```

**Fig. 1.13 – Schema dell'algoritmo di Frank-Wolfe**

Nel caso di funzioni di costo separabili è necessario ricorrere all'*algoritmo di diagonalizzazione* [51], che si basa sulla soluzione di una successione di problemi con funzioni di costo separabili che approssimano il problema. La convergenza di tale algoritmo non è garantita.

### 1.2.5. Algoritmi di assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti (SUE)

L'individuazione dei flussi di equilibrio deterministico è basata sulla soluzione del modello di punto fisso (1.20). Per risolvere questo problema è stato proposto l'utilizzo dell'*Algoritmo delle Medie Successive* [39, 92, 96].

Nella variante MSA-FA (dalle iniziali di "Method of Successive Averages – Flow Averaging") ad ogni iterazione i è generato un vettore dei flussi ammissibili di arco $\mathbf{f}^{(i)}$ partendo da una soluzione ammissibile iniziale, $\mathbf{f}^{(0)}$. L'algoritmo converge verso il vettore dei flussi di equilibrio $\mathbf{f}_{SUE}$ se le funzioni di costo sono separabili.

Ad ogni iterazione viene risolto un problema di carico stocastico della rete con i costi corrispondenti alla soluzione corrente. La soluzione del problema di carico stocastico, $\mathbf{f}_{SNL}^{(i)}$, viene combinata con la soluzione corrente per generare il nuovo punto $\mathbf{f}^{(i)}$.

La condizione di arresto prevede che una norma della differenza fra il vettore dei flussi di carico stocastico della rete calcolati nella corrente iterazione e la soluzione dell'iterazione precedente, resa adimensionale, sia inferiore ad una prefissata soglia $\omega$.

Uno schema dell'algoritmo è riportato nella Fig. 1.14.

$i := 0$
$\mathbf{f}^{(0)} := \boldsymbol{f}_{SNL}(\boldsymbol{c}(\mathbf{f} = \mathbf{0}))$
`Ripeti`
`{`
$i := i + 1$
$\mathbf{c}^{(i)} := \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^{(i-1)})$
$\mathbf{f}_{SNL}^{(i)} := \boldsymbol{f}_{SNL}(\mathbf{c}^{(i)})$
$\mathbf{f}^{(i)} := \mathbf{f}^{(i-1)} + (1/i)\,(\mathbf{f}_{SNL}^{(i)} - \mathbf{f}^{(i-1)})$
`}`
`finchè` $\| \mathbf{f}_{SNL}^{(i)} - \mathbf{f}^{(i-1)} \| / \mathbf{f}^{(i-1)} < \omega$

**Fig. 1.14 – Schema dell'Algoritmo delle Medie Successive (MSA-FA)**

Nel caso di funzioni di costo non separabili è possibile ricorrere all'algoritmo MSA-FA oppure all'algoritmo di diagonalizzazione, ma non è garantita la convergenza. Un'altra alternativa è l'utilizzo della variante MSA-CA (dalle iniziali di "Method of Successive Averages – Cost Averaging"), che invece di mediare sui flussi di arco media sui costi di arco. Tale algoritmo è più lento della versione MSA-FA ma garantisce la convergenza.

# CAPITOLO 2
# Progetto dei sistemi di trasporto

I modelli e gli algoritmi descritti nel precedente capitolo simulano gli aspetti rilevanti di un sistema di trasporto assumendo note le caratteristiche rilevanti dei sistemi di domanda e di offerta. Questi modelli ed algoritmi possono essere utilizzati come strumenti per il progetto dei sistemi di trasporto, in quanto sono in grado di valutarne le condizioni di funzionamento in corrispondenza di una data configurazione del sistema (ad esempio la configurazione attuale modificata in funzione di alcuni interventi decisi a priori). Questo approccio è noto come *"what if"* ("cosa succede se"), ed una sua schematizzazione è riportata nella Fig. 2.1.

L'approccio *"what to"* ("cosa fare per") invece prevede l'utilizzo di metodi di progetto che generano e valutano differenti configurazioni di un sistema di trasporto, utilizzando informazioni provenienti da configurazioni precedentemente esplorate nel tentativo di perseguire un insieme di obiettivi e nel rispetto di un insieme di vincoli. Per mezzo dell'approccio "what to" è possibile ottenere in output utili indicazioni sugli interventi da attuare in un sistema di trasporto, fornendo in input al più solo una configurazione iniziale del sistema (o un insieme di configurazioni). Ovviamente per valutare le configurazioni di un sistema di trasporto è necessario simularne il funzionamento e pertanto i modelli e di simulazione sono parte integrante dei modelli di progetto. La schematizzazione dell'approccio "what to" è riportata nella Fig. 2.2.

Un interpretazione interessante della differenza fra i problemi di simulazione e quelli di progetto può essere data nell'ambito della *teoria dei giochi* [81, 110], che è uno strumento matema utile a comprendere i fenomeni che si osservano quando più decisori interagiscono fra loro. Le ipotesi alla base di questa teoria prevedono che i decisori (detti anche giocatori) perseguano in maniera razionale obiettivi esogenamente definiti tenendo in considerazione le loro conoscenze e le previsioni del comportamento degli altri decisori.

Il problema di simulazione può essere interpretato come un *gioco di Nash*, in cui ciascun utente del sistema di trasporto può essere visto come un generico giocatore che persegue i propri obiettivi basandosi sulle informazioni a lui disponibili, ed ignorando le possibili reazioni degli altri giocatori. Tale analogia è valida per i modelli di equilibrio, mentre i modelli di carico della rete possono essere visti come un caso particolare: ciascun giocatore (utente) non è influenzato dalle decisioni degli altri giocatori (a causa dell'assenza del fenomeno della congestione) e quindi ognuno assume le sue decisioni in maniera indipendente dagli altri.

Il problema di progetto può essere interpretato come un *gioco di Stackelberg*. In questo gioco uno dei giocatori (o un gruppo di giocatori) viene detto *leader* e conosce in anticipo (cioè può prevedere) le reazioni alle sue azioni degli altri giocatori, detti *follower*, che invece ignorano le possibili reazioni degli altri giocatori. In questa analogia il leader è il

gestore del sistema di trasporto mentre i follower sono gli utenti. Infatti il gestore può modificare la configurazione del sistema conoscendo in anticipo le reazioni degli utenti grazie ai modelli di simulazione.

Sebbene in generale nel progetto di un sistema di trasporto possono essere considerati interventi sia sul sistema di domanda che su quello di offerta, nel seguito si farà esclusivo riferimento al progetto dell'offerta di un sistema di trasporto. Il progetto della domanda di trasporto non è frequentemente trattato in letteratura e le sue applicazioni sono limitate a contesti particolari, quali ad esempio l'evacuazione di aree a rischio: in tale caso è possibile influire ad esempio sull'emissione (decidendo se ordinare o meno l'evacuazione di determinate zone) e sulla distribuzione (decidendo la localizzazione dei centri di raccolta, cioè le destinazioni stabilite per gruppi di utenti) [94].

Questo capitolo descrive i modelli (paragrafo 2.1) e gli algoritmi (paragrafo 2.2) con i quali è possibile progettare l'offerta di un sistema di trasporto. Nel capitolo è fornita una sintesi del vasto stato dell'arte sull'argomento, e la descrizione è riferita con maggiore dettaglio alla progettazione di un sistema di trasporto stradale urbano.

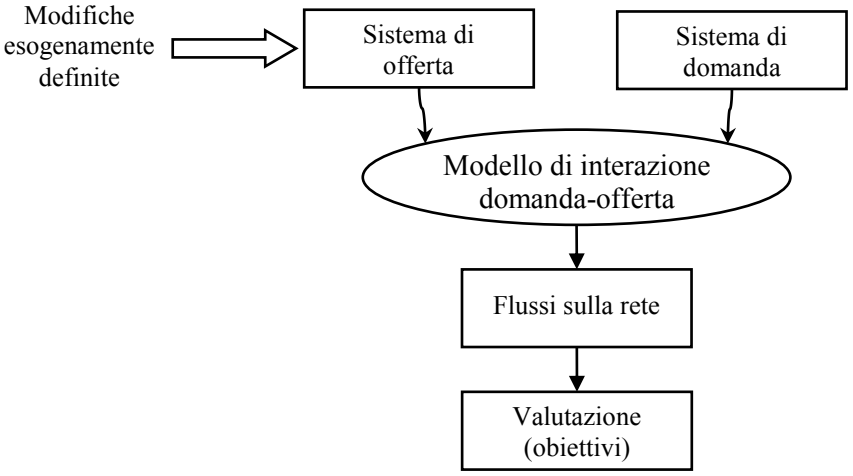



**Fig. 2.1 – Approccio "what if"**

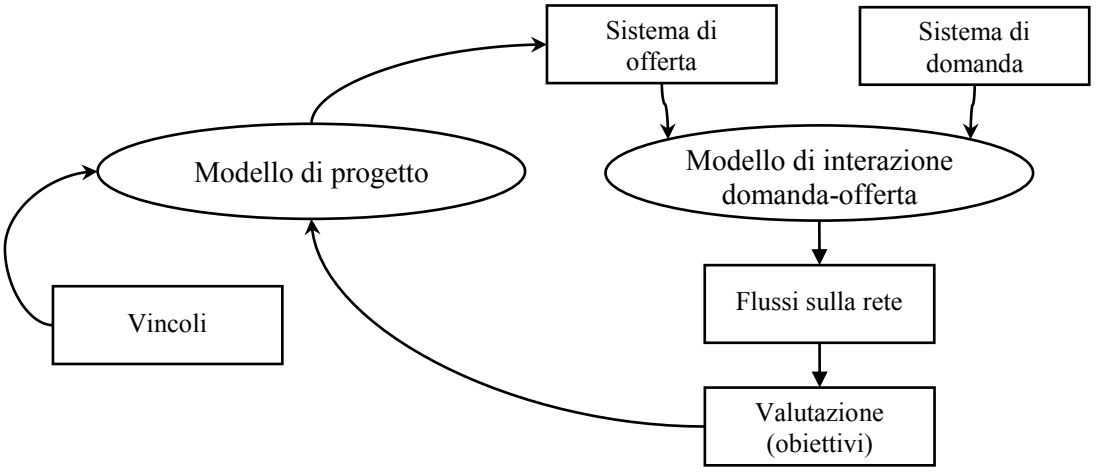



**Fig. 2.2 – Approccio "what to"**

# 2.1. Modelli

Il processo di costruzione di un modello di progetto di un sistema di trasporto consta di due fasi: la prima di definizione concettuale e la seconda di formalizzazione matematica.

La prima fase consiste nella definizione degli elementi sui quali intervenire, degli obiettivi e dei vincoli. Questa fase è essenzialmente di competenza dei decisori politici, in particolar modo per quanto riguarda la definizione degli obiettivi da perseguire. Il compito dei tecnici si limita a garantire la coerenza generale del modello e alla definizione di alcune tipologie di vincoli necessari, anche se non presi in considerazione dai decisori politici (essenzialmente vincoli di natura tecnica o relativi al comportamento degli utenti del sistema).

La seconda fase consiste nella formulazione matematica del modello concettualmente definito nella fase precedente. Questa fase è prettamente tecnica e comporta la necessità di costruire un modello semplificato della realtà. I risultati ottenuti dalla soluzione dei modelli formulati in questa fase possono dar luogo ad un processo di feedback che consente attraverso un'interazione tecnico-politica di modificare le direttive definite nella prima fase.

Nel paragrafo 2.1.1 è proposta una classificazione dei modelli di progetto in funzione degli aspetti concettuali che li caratterizzano. Nel paragrafo 2.1.2 è trattata l'applicazione dei tali modelli alla pianificazione dei sistemi di trasporto. Nel paragrafo 2.1.3 è riportata la formulazione generale di un modello di progetto. Nel paragrafo 2.1.4 sono riportati alcuni esempi delle più diffuse formulazioni proposte in letteratura e/o utilizzate nella pratica.

## 2.1.1. Classificazione dei modelli di progetto

I modelli per il progetto delle reti di trasporto possono essere classificati essenzialmente in funzione di tre elementi:

- le variabili decisionali;
- gli obiettivi;
- i vincoli.

Questi elementi non sono fra di loro indipendenti, ed in particolare la scelta delle variabili decisionali influenza profondamente gli obiettivi ed i vincoli. Ad esempio alcuni vincoli servono ad imporre la compatibilità delle variabili decisionali e pertanto essi dipendono strettamente dal tipo di variabili considerate.

Una classificazione dei modelli di progetto secondo i tre elementi sopra considerati (variabili decisionali, obiettivi e vincoli) è dettagliatamente riportata nel seguito, rispettivamente nei paragrafi 2.1.1.1, 2.1.1.2 e 2.1.1.3. La classificazione proposta è basata su altre classificazioni proposte in letteratura [26].

### 2.1.1.1. Variabili decisionali

Le *variabili decisionali* sono una rappresentazione formale degli elementi del sistema di trasporto sui quali è possibile intervenire. Cioè si assume che alcuni elementi del sistema

possono essere modificati, ed a ciascuno di questi viene associata una variabile decisionale la quale può assumere tanti valori quante sono le possibili configurazione dell'elemento del sistema associato. Gli elementi del sistema ai quali non è associata alcuna variabile decisionale non possono essere modificati, e pertanto la loro configurazione deve ritenersi fissata a priori.

Di seguito è riportato un elenco dei principali elementi su cui è possibile intervenire nel progetto dei sistemi di trasporto:

- *nuovo arco stradale*, rappresentato da variabili binarie che determinano se un dato arco deve essere realizzato o meno;
- *senso di marcia*, rappresentato da variabili che determinano il senso di percorrenza delle corsie, o eventualmente anche la possibilità che la corsia sia utilizzata per la sosta dei veicoli;
- *regolazione semaforica*, rappresentata da variabili che determinano il tempo di ciclo per ogni intersezione semaforizzata e i tempi di verde per ogni fase;
- *sfasamento fra cicli semaforici*, rappresentato da variabili che determinano lo sfasamento temporale (offset) fra i tempi di ciclo di intersezioni semaforiche vicine fra loro;
- *struttura delle fasi semaforiche*, rappresentata da variabili che determinano come gli accessi o le manovre relative ad un'intersezione devono essere raggruppate in fasi, e l'ordine delle fasi;
- *larghezza della carreggiata*, rappresentata da variabili che rappresentano l'incremento (o il decremento) della larghezza della sezione trasversale di carreggiate o semicarregiate stradali esistenti;
- *road pricing*, rappresentata da variabili che determinano il costo monetario relativo al pedaggio associato alla percorrenza di archi stradali oppure all'ingresso in determinate aree;
- *park pricing*, rappresentata da variabili che determinano il costo monetario orario relativo alla sosta in ciascuna zona, eventualmente differenziandolo in considerazione della durata della sosta e/o della zona di residenza;
- *linea*, rappresentata da variabili che determinano l'itinerario seguito dai mezzi adibiti al trasporto collettivo durante il servizio;
- *frequenza*, rappresentata da variabili che determinano la frequenza di ogni linea di trasporto collettivo;
- *orario*, rappresentato da variabili che determinano l'orario di partenza dal capolinea di ogni corsa (e conseguentemente l'orario di passaggio ad ogni fermata);
- *tariffa dei titoli di viaggio*, rappresentata da variabili che determinano il prezzo dei titoli di viaggio.

Non sono stati considerati quegli elementi che non hanno un impatto diretto sull'utenza del sistema di trasporto, cioè ad esempio la progettazione dei turni dei veicoli e degli autisti o il dimensionamento della flotta di un azienda di trasporto collettivo. Tuttavia, almeno in alcuni casi non è possibile prescindere dal considerare tali elementi.

Le variabili decisionali possono essere classificate in funzione di alcuni fattori: il tipo di sistema di trasporto, l'ambito di intervento, la natura della variabile. Tali classificazioni sono di seguito trattate ed una sintesi è riportata nella Tab. 2.1.

In funzione del tipo di sistema di trasporto le variabili decisionali possono essere suddivise in due gruppi:

- variabili relative ai *sistemi di trasporto individuale*: nuovo arco stradale, senso di marcia, regolazione semaforica, sfasamento fra cicli semaforici, larghezza della carreggiata, struttura delle fasi semaforiche, road pricing, park pricing;
- variabili relative ai *sistemi di trasporto collettivo*: linea, orario, frequenza, tariffa dei titoli di viaggio.

La modifica di variabili relative al sistema di trasporto individuale può influire sul sistema di trasporto collettivo e viceversa la modifica di variabili relative al sistema di trasporto collettivo può influire sul sistema di trasporto individuale. Tale influenza reciproca si può esercitare sia perché si modifica la ripartizione modale, sia perché i flussi dei veicoli privati e dei mezzi di trasporto collettivo interagiscono fra loro sugli archi in cui il servizio di trasporto collettivo opera in sede promiscua. Inoltre alcune delle variabili che sono state considerate proprie del sistema di trasporto individuale (ad esempio il senso di marcia e le regolazioni semaforiche) possono avere la loro influenza diretta sul sistema di trasporto collettivo. Pertanto anche se si considerano variabili appartenenti solo al sistema di trasporto individuale o collettivo, è spesso opportuno simulare il funzionamento di entrambi i sistemi di trasporto.

In funzione dell'ambito di intervento le variabili decisionali possono essere suddivise in tre gruppi:

- variabili relative alla *topologia della rete*: nuovo arco stradale, senso di marcia, linea;
- variabili relative alle *prestazioni*: regolazione semaforica, sfasamento fra cicli semaforici, larghezza della carreggiata, struttura delle fasi semaforiche, orario, frequenza;
- variabili relative ai *prezzi*: road pricing, park pricing, tariffa dei titoli di viaggio.

In funzione della natura le variabili decisionali possono essere suddivise in due gruppi:

- variabili *continue*: regolazione semaforica, sfasamento fra cicli semaforici, larghezza della carreggiata, road pricing, park pricing, orari, frequenza, tariffa dei titoli di viaggio;
- variabili *discrete*: nuovo arco stradale, senso di marcia, struttura delle fasi semaforiche, linea.

Tale distinzione è notevolmente rilevante perché è il principale fattore che discrimina la tipologia di algoritmi risolutivi utilizzati. In uno stesso modello possono essere contemporaneamente prese in considerazione variabili decisionali discrete e continue, ed in tal caso il problema si dice misto intero. Potenzialmente ogni combinazione di variabili continue e discrete può essere considerata. Alcune delle combinazioni trattate in letteratura sono: regolazioni semaforiche e struttura delle fasi [22, 62], senso di marcia e regolazione semaforica [24].

La rappresentazione dei potenziali interventi sul sistema non è sempre riconducibile in maniera univoca e netta ad una variabile appartenente ad uno dei due gruppi. Ad esempio l'incremento della larghezza di una infrastruttura stradale può assumere valore reale qualora non vi siano vincoli sulla struttura della carreggiata; invece, se ad esempio la larghezza delle corsie deve assumere un valore stabilito da normative (vedi nota 13 a pagina 5), la larghezza della carreggiata deve essere un multiplo intero della larghezza della corsia e pertanto è il numero (intero) di corsie che deve essere assunto quale variabile decisionale. Come ulteriore esempio si può considerare la frequenza di una linea di trasporto che, oltre a poter essere rappresentata da una variabile continua, può essere

rappresentata dal numero (intero) di mezzi necessari per garantire una certa frequenza (ottenendo notevoli vantaggi nella predisposizione dei turni dei veicoli).

**Tab. 2.1 – Classificazione delle variabili decisionali**

| | *Tipo di sistema di trasporto* | | *Ambito di intervento* | | | *Natura della variabile* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Variabile decisionale* | *Individuale* | *Collettivo* | *Topologia* | *Prestazioni* | *Prezzi* | *Continua* | *Discreta* |
| Nuovo arco stradale | • | | • | | | | • |
| Senso di marcia | • | | • | | | | • |
| Regolazione semaforica: tempi di verde e di ciclo | • | | | • | | • | |
| Sfasamento fra cicli semaforici | • | | | • | | • | |
| Larghezza della carreggiata (numero di corsie) | • | | | • | | • | (•) |
| Struttura delle fasi semaforiche | • | | | • | | | • |
| Road pricing | • | | | | • | • | |
| Park pricing | • | | | | • | • | |
| Linea | | • | • | | | | • |
| Frequenza (numero di bus in servizio sulla linea) | | • | | • | | • | (•) |
| Orario | | • | | • | | • | |
| Tariffa dei titoli di viaggio | | • | | | • | • | |

### 2.1.1.2. Obiettivi

La progettazione di un sistema di trasporto può essere effettuata tenendo conto di diversi obiettivi. I vari obiettivi possono essere classificati in funzione delle categorie che sono interessati a perseguirli:

- obiettivi degli *utenti del sistema di trasporto*;
- obiettivi della *collettività*;
- obiettivi dei *gestori del sistema di trasporto*.

Va osservato che lo stesso individuo può agire in momenti diversi sia in qualità di utente del sistema che di membro della collettività e talvolta anche in qualità di gestore del sistema. La classificazione proposta è di seguito trattata ed una sintesi è riportata nella Tab. 2.2.

Gli obiettivi degli utenti del sistema di trasporto consistono nella minimizzazione delle disutilità alle quali sono soggetti. Tali disutilità vengono misurate per mezzo delle funzioni di costo e consistono principalmente nelle seguenti grandezze:

- *tempo di viaggio*, che in alcuni casi è opportuno suddividere in più componenti, a ciascuna delle quali viene attribuito un peso differente: tempo a bordo del veicolo, tempo di attesa alla fermata di un servizio di trasporto collettivo, tempo di accesso/egresso alle/dalle fermate di un servizio di trasporto collettivo;
- *costo monetario (percepito dagli utenti del sistema)*, che usualmente tiene conto dei pedaggi, del costo della sosta, e del costo dei biglietti dei servizi di trasporto collettivo e più raramente del costo del carburante (dei mezzi di trasporto individuale);

- *altre disutilità*, quali ad esempio il numero di trasbordi, la differenza fra l'orario desiderato di partenza/arrivo di una corsa e l'orario effettivo, la mancanza di comfort e/o di privacy, etc.

Gli obiettivi della collettività consistono nella minimizzazione delle esternalità associate al funzionamento del sistema di trasporto. Tali esternalità possono essere misurate per mezzo delle funzioni di prestazione[1] e delle funzioni di impatto e consistono principalmente nelle seguenti grandezze:

- *costo monetario (non percepito dagli utenti del sistema)*, che usualmente tiene conto dei costi di pneumatici, lubrificanti e simili, della svalutazione dei veicoli, e talvolta anche del costo del carburante;
- *incidentalità*, che può essere valutata per mezzo delle sue conseguenze: numero di morti, numero di feriti (eventualmente suddivisi per gravità) ed entità dei danni materiali;
- *inquinamento atmosferico*, causato dagli scarichi della combustione dei veicoli a motore termico, che può essere valutato tenendo conto della quantità di inquinanti emessi [2] : monossido di carbonio (CO), piombo (Pb), anidride solforosa ($SO_2$), ossidi di azoto ($NO_x$), idrocarburi incombusti, polveri e articolato;
- *inquinamento acustico*, causato dai motori e dall'interazione fra le ruote dei veicoli e le infrastrutture, che può essere valutato considerando il livello di pressione sonora equivalente[3] a cui sono soggetti i membri della collettività.

Va comunque osservato che non tutte le esternalità generate da un sistema di trasporto sono fattori negativi: ad esempio si può osservare un incremento del valore degli immobili localizzati nelle zone in cui vi è un incremento dell'accessibilità.

L'obiettivo dei gestori del sistema di trasporto (cioè degli enti pubblici territoriali, delle aziende che hanno in concessione infrastrutture di trasporto, delle aziende di trasporto collettivo, etc.) consiste nella massimizzazione della differenza fra i ricavi e i costi. I principali ricavi sono:

- *ricavi dai titoli di viaggio* dei servizi di trasporto collettivo;
- *ricavi da road pricing*;
- *ricavi da park pricing*.

I principali costi sono:

- *costi di investimento*, associati alla costruzione di nuove infrastrutture o al potenziamento del parco veicolare di aziende di trasporto collettivo;

[1] Le grandezze misurate per mezzo delle funzioni di prestazione benché sono associate agli utenti del sistema di trasporto, non vengono generalmente percepite da questi ultimi come obiettivi da minimizzare (esse infatti non influiscono sulle scelte di viaggio). Pertanto in tale classificazione la minimizzazione di tali grandezze è stata inclusa fra gli obiettivi della collettività.

[2] Un approccio più corretto rispetto alla valutazione della quantità degli inquinanti emessi consiste nella valutazione della concentrazione degli inquinanti. Tale approccio è più complesso perché comporta la necessità di utilizzare, oltre ai modelli di emissione degli inquinanti, modelli di dispersione degli inquinanti che dipendono dalle condizioni meteorologiche e quindi sono fortemente aleatori.

[3] Il livello di pressione sonora equivalente rappresenta un valore medio nel periodo di riferimento. Esso viene solitamente misurato in decibel ponderati in scala A, db(A), cioè una misura della pressione sonora che tiene conto della ridotta sensibilità dell'orecchio umano alle basse ed alte frequenze.

- *costi di gestione*, associati alla manutenzione ordinaria e straordinaria delle infrastrutture e del parco veicolare, al personale e ai beni di consumo (carburante, pneumatici, lubrificanti e simili utilizzati per i mezzi dei servizi di trasporto collettivo).

**Tab. 2.2 – Classificazione degli obiettivi**

| *Obiettivo* | *Utenti del sistema di trasporto* | *Collettività* | *Gestori del sistema di trasporto* |
|---|---|---|---|
| Tempo di viaggio | ⇓ | | |
| Costo monetario (percepito dagli utenti del sistema) | ⇓ | | |
| Altre disutilità (numero di trasbordi, mancanza di comfort, etc.) | ⇓ | | |
| Costo monetario (non percepito dagli utenti del sistema) | | ⇓ | |
| Incidentalità | | ⇓ | |
| Inquinamento atmosferico | | ⇓ | |
| Inquinamento acustico | | ⇓ | |
| Ricavi dai titoli di viaggio | | | ⇑ |
| Ricavi da road pricing | | | ⇑ |
| Ricavi da park pricing | | | ⇑ |
| Costi di investimento | | | ⇓ |
| Costi di gestione | | | ⇓ |

⇑ obiettivo da massimizzare ⇓ obiettivo da minimizzare

Gli obiettivi presi in considerazione talvolta risultano difficilmente conciliabili tra loro: ad esempio la riduzione dei costi per il gestore è in contrasto con la riduzione dei tempi di viaggio per gli utenti. In altri casi, in maniera ancora più esplicita, le grandezze che alcuni cercano di massimizzare sono quelle che altri cercano di minimizzare: ad esempio il gestore vuole massimizzare i ricavi dai titoli di viaggio, mentre gli utenti vogliono minimizzare questo costo. Pertanto quando il progetto viene effettuato tenendo in conto gli interessi di diverse categorie (come in generale è corretto fare) è opportuno esprimere un giusto bilanciamento fra le varie esigenze.

### 2.1.1.3. Vincoli

La progettazione di un sistema di trasporto è un problema di ottimizzazione vincolata. I vincoli possono essere classificati suddividendoli in tre gruppi:

- vincoli *tecnici*;
- vincoli *esterni*;
- vincoli *comportamentali*.

I vincoli tecnici sono relativi a condizioni di funzionalità intrinseche del sistema. Spesso questi vincoli esprimono delle condizioni sulle variabili decisionali che dipendono dalla loro stessa definizione e prescindono dalla simulazione del sistema stesso. Alcuni esempi di vincoli tecnici sono di seguito riportati:

- *compatibilità dei parametri di regolazione semaforica*: per ogni singola intersezione la somma dei tempi di verde di ogni fase deve coincidere col tempo

di ciclo[4], ed inoltre ogni tempo di verde deve essere non inferiore ad un tempo prefissato;

- *uguaglianza dei tempi di ciclo di intersezioni coordinate*: ciascun insieme di intersezioni semaforizzate di cui vengono coordinati i cicli deve essere caratterizzato dallo stesso tempo di ciclo, oppure da tempi di ciclo multipli interi di un valore comune;
- *massima frequenza di una linea* di trasporto collettivo: la massima frequenza è l'inverso del massimo fra il minimo distanziamento temporale che è possibile mantenere sulla linea[5] e il minimo distanziamento temporale che è possibile mantenere alla fermata[6];
- *massimo numero di veicoli disponibili* per il servizio di trasporto collettivo: il numero di bus necessari per effettuare il servizio programmato deve essere non superiore al numero di bus disponibili (tenendo in considerazione i mezzi mediamente non disponibili per le manutenzioni ordinarie e straordinarie);
- *massimo rapporto fra flusso e capacità*: può essere imposto che il rapporto fra il flusso e la capacità degli archi deve essere inferiore ad un certo valore (solitamente unitario)[7].

I vincoli esterni sono relativi a condizioni imposte dalle normative vigenti e dagli standard, a condizioni imposte dai gestori del sistema di trasporto o da decisori politici e a condizioni che derivano dalle disponibilità finanziarie. Alcuni esempi di vincoli esterni sono di seguito riportati:

- *limite di budget*: vincolo che impone di contenere i costi entro margini ammissibili (ad esempio i costi di investimento potrebbero essere limitatati dal finanziamento disponibile);
- *rapporto minimo fra ricavi e costi*: vincolo che impone al gestore di avere dei ricavi che coprono almeno una certa aliquota dei costi[8];
- *limiti delle tariffe dei titoli di viaggio, road pricing e park pricing*: l'entità di tali tariffe, qualora non sia fissata da normative[9] o contratti, può comunque essere limitata superiormente dal decisore per ragioni di opportunità ed equità sociale;

[4] Nell'ipotesi in cui vi siano intervalli di tempo in cui, per ragioni di sicurezza, tutti gli accessi hanno il rosso, la somma di tali intervalli deve essere detratta dal tempo di ciclo.

[5] Il minimo distanziamento temporale che è possibile mantenere sulla linea è un fattore critico soprattutto per il trasporto su ferro dove, non essendo la marcia a vista ed essendo il coefficiente di aderenza basso, è necessario mantenere un opportuno di stanziamento per consentire l'arresto dei veicoli in condizioni di sicurezza.

[6] Il minimo di stanziamento temporale alla fermata è funzione del tempo necessario affinché un veicolo si arresti, consenta la salita e/o la discesa dei passeggeri e riparta. Esso inoltre dipende da quanti veicoli possono contemporaneamente accedere e sostare alla fermata (cioè dal numero di golfi di fermata per il trasporto su gomma, il numero di binari di stazione per il trasporto su ferro, il numero di piste e di posti nel piazzale per il trasporto aereo, la lunghezza della banchina per il trasporto marittimo).

[7] Tale vincolo viene solitamente imposto sugli archi di linea del trasporto collettivo (quando viene simulato con modelli di carico della rete), poiché altrimenti non si avrebbe nessun controllo di eventuali sovrasaturazioni. Invece nel caso del trasporto stradale le funzioni di costo tengono solitamente conto della congestione e penalizzano una eccessiva saturazione dell'arco.

[8] La normativa italiana per mezzo del D.Lgs. 422/1997 prescrive che le aziende di trasporto collettivo mantengano un rapporto almeno pari al 35% tra ricavi da traffico e costi operativi, al netto dei costi di infrastruttura.

[9] Ad esempio i pedaggi della rete autostradale italiana sono stabiliti da delibere del CIPE (Comitato Interministeriale per la Programmazione Economica).

- *massima concentrazione di inquinanti atmosferici*: le normative internazionali e nazionali impongono dei limiti alla concentrazione di inquinanti[10], dei quali si deve tenere conto nel progettare un sistema di trasporto per prevenirne il superamento;
- *massimo livello di pressione sonora*: anche in questo caso la normativa impone dei limiti superiori al livello di pressione sonora equivalente (vedi nota 3 a pagina 47)[11], che devono essere tenuti in conto nella progettazione di un sistema di trasporto.
- *vincoli urbanistici, ambientali e archeologici*: disposizioni sull'utilizzo del territorio previste dalla normativa e dagli strumenti di pianificazione urbanistica, oppure imposte dal decisore politico;
- *disposizioni delle norme sulla viabilità*: norme sulle regole di circolazione[12] e sulla costruzione delle infrastrutture di trasporto[13];
- *direttive dei piani dei trasporti gerarchicamente superiori*: vincoli derivanti da indicazioni e prescrizioni contenute nei documenti di pianificazione del sistema dei trasporti di livello superiore[14].

I vincoli comportamentali servono per rappresentare la risposta degli utenti alle modifiche apportate all'offerta. Infatti il progettista del sistema non può controllare il comportamento degli utenti, che quindi deve essere considerato un vincolo. Per tenere conto di tale comportamento è necessario ricorrere ai modelli che simulano l'interazione fra la domanda e l'offerta. Questo vincolo è l'elemento che conferisce una particolare difficoltà teorica e computazionale ai modelli di progetto.

La scelta di uno dei diversi modelli di interazione domanda-offerta trattati nel paragrafo 1.1.4 va effettuata tenendo conto sia della loro capacità di riprodurre il fenomeno reale sia della loro complessità, effettuando un compromesso fra queste due opposte esigenze quando è necessario. In generale la complessità cresce passando dai modelli deterministici

[10] La normativa italiana individua i valori di concentrazione e di esposizione degli inquinanti atmosferici sulla base di indicazioni dell'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS), desunte dallo stato delle conoscenze sugli effetti dell'esposizione della popolazione ai singoli inquinanti. Il D.P.R. 203/1988 ed il D.P.C.M. 28/03/1983, con la definizione degli standard di qualità dell'aria, validi su tutto il territorio nazionale, individuano i limiti di concentrazione di inquinanti atmosferici espressi come *valori limite* (concentrazioni e relativi tempi di esposizione massimi consentiti tali da costituire un rischio accettabile per la salute della popolazione) e *valori guida* (cioè valori a cui tendere, destinati alla prevenzione a lungo termine in materia di salute dell'uomo e protezione dell'ambiente). Più recentemente sono stati inoltre definiti per le grandi aree urbane con i decreti del Ministero dell'Ambiente (D.M. 15/4/1994 e D.M. 25/11/1994) i livelli di attenzione e di allarme, al fine di attivare concrete procedure (ad esempio il blocco totale della circolazione oppure la circolazione a targhe alterne) per prevenire episodi acuti di inquinamento atmosferico o il superamento degli standard.

[11] La normativa italiana individua per mezzo del D.P.C.M. 14/11/1997 dei valori limite del livello di pressione sonora equivalente in funzione della destinazione d'uso del territorio e della fascia oraria (diurna o notturna). Esistono anche norme specifiche che riguardano l'inquinamento acustico generato negli aeroporti (D.P.R. 496/1997) e lungo le infrastrutture ferroviarie (D.P.R. 459/1998).

[12] In Italia la materia è regolata dal Codice della Strada (D.Lgs. 285/1992 e successive modificazioni) e dal relativo regolamento di esecuzione e di attuazione (D.P.R. 495/1992 e successive modificazioni).

[13] Ad esempio le "Norme sulle caratteristiche geometriche delle strade extraurbane" periodicamente aggiornate a cura del C.N.R. (Consiglio Nazionale delle Ricerche), che fra le varie disposizioni contengono quelle relative alle dimensioni delle corsie.

[14] Cioè ad esempio, con riferimento agli strumenti di pianificazione italiani, le indicazioni contenute nel Piano Generale dei Trasporti e della Logistica (PGTL) devono ritenersi vincolanti nella redazione dei Piani Regionali dei Trasporti (PRT).

a quelli stocastici e dai modelli di carico della rete a quelli di equilibrio degli utenti. L'utilizzo del modello di ottimo di sistema deterministico consente in alcuni casi una notevole semplificazione del modello proposto, ma molto spesso non permette una simulazione adeguata del comportamento degli utenti.

**Tab. 2.3 – Classificazione dei vincoli**

| *Vincolo* | *Tecnico* | *Esterno* | *Comportamentale* |
|---|---|---|---|
| Compatibilità dei parametri di regolazione semaforica | • | | |
| Uguaglianza dei tempi di ciclo di intersezioni coordinate | • | | |
| Massima frequenza di una linea | • | | |
| Massimo numero di veicoli disponibili | • | | |
| Massimo rapporto fra flusso e capacità | • | | |
| Limite di budget | | • | |
| Rapporto minimo fra ricavi e costi | | • | |
| Limiti delle tariffe dei titoli di viaggio, road pricing e park pricing | | • | |
| Massima concentrazione di inquinanti atmosferici | | • | |
| Massimo livello di pressione sonora | | • | |
| Vincoli urbanistici, ambientali e archeologici | | • | |
| Disposizioni delle norme sulla viabilità | | • | |
| Direttive dei piani dei trasporti gerarchicamente superiori | | • | |
| Interazione domanda-offerta | | | • |

## 2.1.2. Applicazione alla pianificazione dei sistemi di trasporto

I modelli di progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto costituiscono uno strumento fondamentale di supporto alle decisioni nell'ambito della *pianificazione dei sistemi di trasporto*, cioè di quel processo di gestione di "una concatenazione di decisioni che, periodicamente e attraverso la loro reciproca interazione, danno luogo alla trasformazione del sistema trasporti-territorio" [43].

L'intero processo di pianificazione da luogo allo sviluppo di diversi piani, che possono essere classificati in funzione di tre aspetti [43]:

- la *scala temporale*, che dipende dal tempo di attuazione necessario per realizzare la tipologia di interventi proposti e dalla vita utile degli interventi stessi;
- la *scala spaziale*, che dipende dall'area di studio considerata;
- lo *stadio di avanzamento*, cioè il livello del processo di pianificazione, che nel suo evolversi è sempre più dettagliato.

In funzione della scala temporale è possibile definire tre livelli di pianificazione:

- *strategica*, che si riferisce ad interventi organizzativi ed infrastrutturali di rilevanza tale da incidere sulla struttura del sistema dei trasporti per un lungo periodo (alcuni decenni);

- *tattica*, che si riferisce ad interventi di breve/medio periodo, e riguarda le decisioni relative ad interventi che impegnano risorse limitate, di solito assumendo una dotazione di infrastrutture pari a quella attuale;
- *operativa*, che si riferisce alla definizione di aspetti particolari dell'esercizio dei singoli modi, ottimizzando l'impiego delle risorse esistenti nel breve periodo (piani di regolazione semaforica, programma di esercizio di un'azienda di trasporto collettivo).

L'intervallo temporale di riferimento influenza i modelli di progetto poiché è necessario tenere conto dell'intero periodo analizzato. Pertanto gli obiettivi devono essere calcolati in corrispondenza di più momenti rappresentativi lungo l'intero arco temporale di riferimento. Inoltre, quando l'analisi si estende su un arco temporale medio-lungo, si pongono due problemi: quello di valutare le variazioni di lungo periodo della domanda e quello di confrontare gli obiettivi relativi ad anni diversi. La valutazione delle variazioni di lungo periodo della domanda può essere effettuata in funzione di alcune ipotesi di variazione di alcuni indicatori socioeconomici rilevanti (la numerosità della popolazione, il prodotto interno lordo, il tasso di motorizzazione, etc.). Il problema del confronto di obiettivi relativi ad anni diversi può essere risolto tentando di ricondurre ad un anno di riferimento (solitamente l'anno corrente) il valore dei diversi obiettivi. Ad esempio tutto ciò che esprimibile in termini di valore monetario (direttamente o attraverso coefficienti di equivalenza) può essere ricondotto ad un anno di riferimento attraverso il *tasso di sconto*, definito come l'incremento percentuale di valore una somma dopo un anno. Se l'anno di riferimento è l'anno corrente tale valore assume il nome di *valore attuale netto*.

In funzione della scala spaziale è possibile definire tre livelli di pianificazione:

- *nazionale*, che riguarda gli spostamenti di persone e di cose tra le diverse regione e fra queste e l'estero;
- *regionale*, che riguarda la mobilità che si esaurisce all'interno dei confini di ciascuna regione ma non all'interno dei singoli comuni;
- *locale*, che riguarda la mobilità che si risolve all'interno di un singolo comune o all'interno di aggregati costituiti da più comuni adiacenti e strettamente integrati.

La scala spaziale considerata influenza i modelli di progetto, in quanto profondamente diverse sono le variabili decisionali considerate. Ad esempio a scala locale è possibile considerare la regolazione semaforica, quando invece ciò non avrebbe alcun senso a scala nazionale.

In funzione dello *stadio di avanzamento* è possibile definire tre livelli di pianificazione:

- *piano direttore*, che contiene le scelte generali di riassetto del sistema dei trasporti sul territorio, e per sua natura è poco operativo e necessità di altri livelli di pianificazione a valle che definiscano nei dettagli le caratteristiche degli interventi;
- *piano attuativo*, che rappresenta uno stralcio del piano direttore e contiene l'approfondimento delle caratteristiche degli interventi previsti nel piano direttore stesso, completandolo ed arricchendone i contenuti, e recependo nuove esigenze eventualmente emerse;
- *studio di fattibilità*, che costituisce il momento ultimo del processo di pianificazione, nel quale vengono valutate le singole alternative relative ad uno specifico intervento.

La classificazione descritta del processo di pianificazione è schematicamente riportata nella Fig. 2.3.

Il processo di pianificazione non è un susseguirsi di piani gerarchicamente ordinati fra loro, poiché un elemento rilevante dell'intero processo è il monitoraggio dei risultati ottenuti in seguito all'applicazione degli interventi previsti dalla pianificazione. Questo monitoraggio consente di instaurare un feedback dai livelli inferiori della pianificazione verso quelli gerarchicamente superiori.

I modelli di progetto proposti in questo studio sono prevalentemente utilizzabili quale strumento di supporto alle decisioni nell'ambito della pianificazione tattico-operativa a scala locale allo stadio di piano direttore o attuativo.

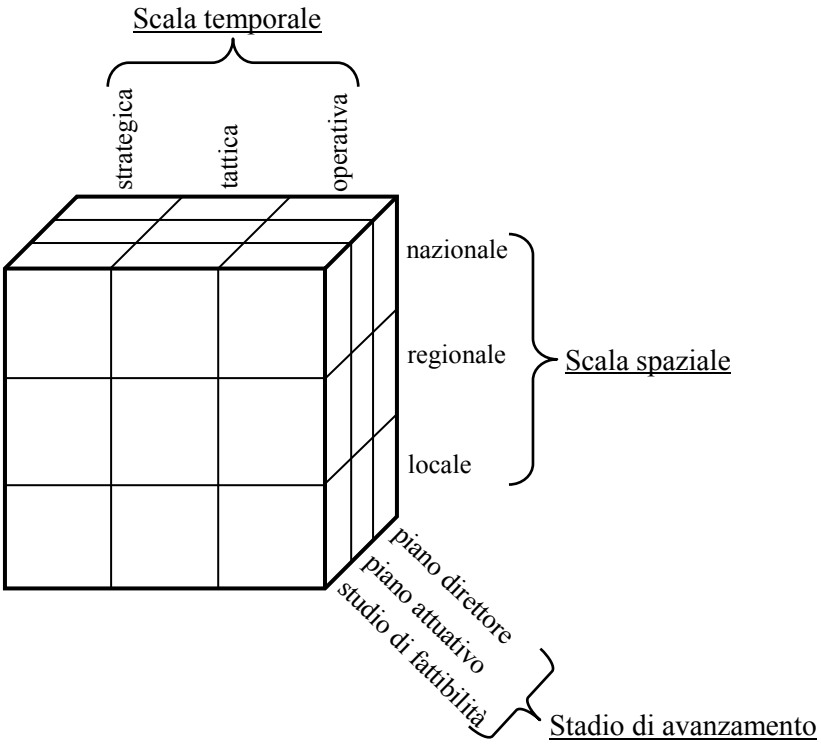



**Fig. 2.3 – Schema della classificazione del processo di pianificazione**

## 2.1.3. Formulazione generale dei modelli di progetto

Il problema di progetto dell'offerta di un sistema di trasporto può essere formulato mediante un modello di ottimizzazione vincolata, che massimizza o minimizza una funzione obiettivo $w(\bullet)$ che dipende da un vettore dei flussi **f*** ottenuto dalla soluzione di qualche modello di assegnazione e da un vettore di variabili decisionali **y**.

$$\mathbf{y}^* = \underset{\mathbf{y}}{arg\,opt}\, w(\mathbf{y}, \mathbf{f}^*) \tag{2.1.a}$$

soggetto ai vincoli:

$$\mathbf{f}^* = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y})\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y}))\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{g}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y})) \tag{2.1.b}$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{f}^* \in \mathrm{T} \tag{2.1.c}$$

$$\mathbf{y}, \mathbf{f}^* \in \mathrm{E} \tag{2.1.d}$$

dove

- $\mathbf{y}^*$ è la soluzione ottima del problema di progetto, cioè il vettore delle variabili decisionali ottime;
- T è l'insieme di ammissibilità dei vincoli tecnici;
- E è l'insieme di ammissibilità dei vincoli esterni.

Il modello può essere formulato tenendo conto di funzioni obiettivo che devono essere minimizzate oppure massimizzate (il caso più frequente è il primo). Poiché possono essere tenuti in conto molteplici *obiettivi elementari*, che nel seguito si assume che siano espressi mediante il vettore $\mathbf{w}$, due possibili approcci possono essere considerati: il primo è l'utilizzo di una funzione obiettivo che sia combinazione lineare di tali obiettivi elementari; il secondo è l'utilizzo di una analisi multicriteria.

Nel primo caso la (2.1.a) può essere scritta nel seguente modo

$$\mathbf{y}^* = \underset{\mathbf{y}}{arg\,opt}\, \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}(\mathbf{y}, \mathbf{f}^*)$$

dove $\boldsymbol{\gamma}$ è il vettore dei coefficienti degli obiettivi elementari, che servono sia a pesare che ad omogeneizzare dimensionalmente i vari obiettivi elementari considerati[15]. Ad esempio la (2.1.a) può essere specificata come

$$\mathbf{y}^* = \underset{\mathbf{y}}{arg\,min}\ \ \gamma_{\mathrm{ut}} \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y})^{\mathrm{T}} \mathrm{f}^* + \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{coll}}{}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y})\mathbf{f}^* + \gamma_{\mathrm{gest}} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}(\mathbf{y}) \tag{2.2}$$

dove, oltre alla simbologia già introdotta,

- $\gamma_{\mathrm{ut}}$ è un elemento del vettore $\boldsymbol{\gamma}$ che rappresenta il coefficiente associato all'obiettivo degli utenti;
- $\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{coll}}$ è un sottovettore del vettore $\boldsymbol{\gamma}$, che rappresenta i coefficienti associati agli obiettivi della collettività;
- $\gamma_{\mathrm{gest}}$ è un elemento del vettore $\boldsymbol{\gamma}$, che rappresenta il coefficiente associato all'obiettivo dei gestori del sistema;
- $\mathbf{1}$ è il vettore unitario (cioè costituito da tutti gli elementi unitari);
- $\mathbf{b}$ è un vettore dei costi di investimento e/o gestione, il cui generico elemento $b_i$ rappresenta il costo associato al generico intervento i ed è funzione della variabile decisionale $y_i$ associata all'intervento i, cioè $b_i = b_i(y_i)$.

I tre addendi della (2.2) rappresentano rispettivamente:

- l'obiettivo degli utenti del sistema di trasporto, che qui viene rappresentato dal costo totale di viaggio subito dagli utenti del sistema (nel caso in cui si

[15] Un elemento del vettore $\boldsymbol{\gamma}$ può essere arbitrariamente fissato ad un valore unitario, poiché solo i rapporti reciproci fra i coefficienti sono rilevanti.

utilizzano modelli di assegnazione con domanda elastica tale approccio non è accettabile, e al posto della minimizzazione del costo deve essere utilizzata la massimizzazione della soddisfazione);

- l'obiettivo della collettività, che qui viene rappresentato da una somma pesata delle esternalità nell'ipotesi che tali esternalità siano associate al singolo arco e dipendono dal flusso dell'arco stesso (vedi paragrafo 1.1.2);
- l'obiettivo dei gestori del sistema di trasporto, che qui viene rappresentato dal costo di investimento e/o gestione (sono trascurati eventuali ricavi).

Nel secondo caso, cioè se viene utilizzata un'analisi multicriteria, è possibile tenere meglio conto del fatto che vi sono obiettivi diversificati e spesso conflittuali fra loro. L'analisi è condotta rispetto ad un certo numero di criteri che possono coincidere con gli obiettivi elementari, oppure essere aggregazione di più obiettivi elementari[16]. Utilizzando questo tipo di analisi è possibile ottenere come risultato della soluzione del modello non un'unica soluzione, ma un insieme di soluzioni, costituito da tutte quelle soluzioni per le quali non esiste un'altra soluzione che presenta valori migliori per tutti i criteri considerati. Tale insieme di soluzioni, dette non dominate, può essere rappresentato su una curva nello spazio dei criteri detta *frontiera di Pareto*. Se l'insieme delle soluzioni non dominate è molto numeroso è preferibile ridurlo mediante l'utilizzo di opportuni metodi che scartano alcune soluzioni dall'insieme in funzione del peso attribuito ai vari criteri.

Il vincolo (2.1.b) è il vincolo associato al comportamento degli utenti, cioè al fatto che, data una certa configurazione dell'offerta **y**, gli utenti effettuano delle scelte di viaggio che determinano il vettore dei flussi **f***. È utile sottolineare ancora che tale comportamento degli utenti non può essere controllato da chi gestisce il sistema di trasporto, e pertanto deve essere ritenuto un vincolo per il progettista.

La (2.1.b) è in particolare riferita ad un modello di equilibrio stocastico degli utenti (SUE), ma questa equazione può essere sostituita dalle (1.13), (1.16) o (1.17) relative rispettivamente ai modelli di assegnazione di carico deterministico della rete (DNL), di carico stocastico della rete (SNL) e di equilibrio deterministico degli utenti (DUE). I modelli di assegnazione possono essere formulati anche come modelli di ottimizzazione[17], e pertanto utilizzando tali formulazioni al posto della (2.1.b) si ottiene come modello di progetto un problema di ottimizzazione bilivello.

Utilizzando come modello di assegnazione un modello di ottimo di sistema deterministico (DSO) formulato per mezzo della (1.21), è possibile ottenere modelli di progetto più facilmente risolvibili al prezzo però di una scarsa realisticità nella simulazione del comportamento degli utenti. Infatti, se si assume come funzione obiettivo la minimizzazione del costo totale di viaggio subito dagli utenti del sistema, cioè se si considera solo il primo addendo della (2.2), allora il vincolo (2.1.b) coincide con la funzione obiettivo (2.1.a) e pertanto il modello di progetto si riduce ad un problema di ottimizzazione ad un solo livello.

[16] L'individuazione dei criteri è una fase molto delicata in una analisi multicriteria poiché bisogna evitare di specificare criteri con diverso livello di dettaglio che potrebbero orientare implicitamente i risultati dell'analisi. Ad esempio se agli obiettivi degli utenti del sistema di trasporto corrispondesse un solo criterio (il costo totale di viaggio) e agli obiettivi della collettività corrispondessero più criteri associati alle emissioni di diverse sostanze inquinanti (CO, Pb, $SO_2$, $NO_x$, etc.) si darebbe implicitamente più peso ai secondi rispetto ai primi.

[17] Si vedano le (1.14) e (1.19) relative rispettivamente ai modelli di assegnazione di carico deterministico della rete (DNL) e di equilibrio deterministico degli utenti (DUE).

L'equazione (2.1.c) rappresenta l'insieme dei vincoli tecnici , mentre l'equazione (2.1.d) rappresenta l'insieme dei vincoli esterni . Entrambe queste equazioni devono essere opportunamente specificate per rendere definito il modello.

Il modello (2.1) può essere schematicamente rappresentato dalla Fig. 2.4, la quale esprime con formalismo matematico gli stessi concetti illustrati nella Fig. 2.2.

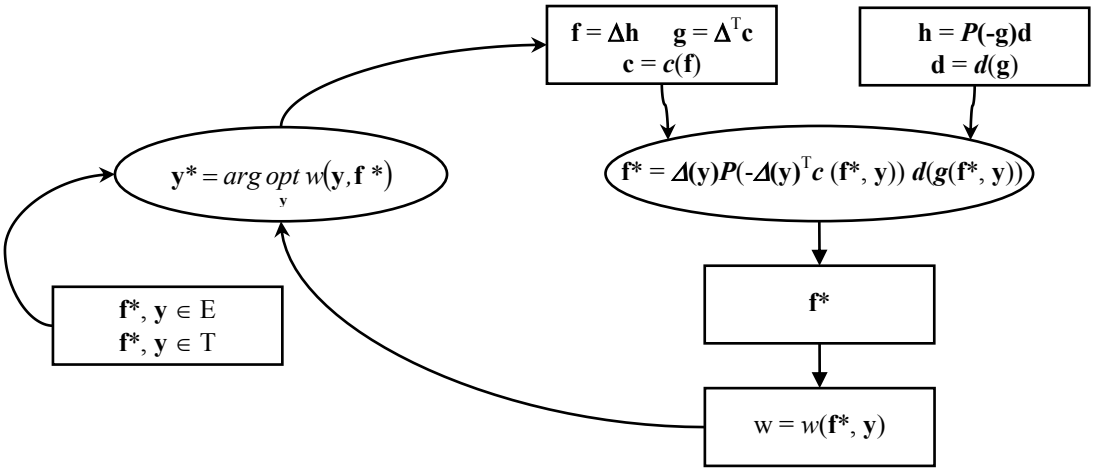



**Fig. 2.4 – Schema della formulazione generale del modello di progetto (cfr. Fig. 2.2)**

## 2.1.4. Esempi di formulazioni di modelli di progetto

In questo paragrafo sono descritte a titolo di esempio due possibili formulazioni del problema di progetto. La prima, con variabili decisionali continue, è il problema dell'incremento della capacità degli archi (incremento della sezione della carreggiata stradale). La seconda, con variabili decisionali discrete, è il problema della selezione di un sottoinsieme di archi (infrastrutture stradali) da realizzare dato un insieme di archi potenzialmente realizzabili. Le due formulazioni descritte sono probabilmente quelle più vastamente trattate in letteratura.

Il problema dell'*incremento della capacità degli archi* può essere formulato nel seguente modo

$$\mathbf{y}^* = \arg\min_{\mathbf{y}} \; \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*,\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^* + \gamma \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}(\mathbf{y}) \tag{2.3.a}$$

soggetto ai vincoli:

$$\mathbf{f}^* = \Delta \boldsymbol{P}(-\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y}))\, \boldsymbol{d}(\boldsymbol{g}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y})) \tag{2.3.b}$$

$$0 \le \mathbf{y} \le \bar{\mathbf{y}} \tag{2.3.c}$$

dove

- **y** è un vettore che ha tanti elementi quanti sono gli archi della rete la cui capacità può essere incrementata, e il cui generico elemento $\mathbf{y}_l$ è il valore dell'incremento della capacita dell'arco l;
- $\bar{\mathbf{y}}$ è un vettore della stessa dimensione di **y**, il cui generico elemento $\bar{\mathbf{y}}_l$ è il massimo valore consentito per la variabile $y_l$;
- **b** è un vettore della stessa dimensione di **y**, il cui generico elemento $b_l$ è il costo associato all'incremento di capacità $y_l$;
- $\gamma$ è un fattore che serve ad omogeneizzare e pesare le due componenti della funzione obiettivo.

Si osservi che nel vincolo comportamentale (2.3.b), a differenza dell'analogo vincolo nella formulazione generale (2.1), la matrice di incidenza archi-percorsi non dipende dal vettore delle variabili decisionali **y**, in quanto esse non alterano la topologia della rete. Si osservi inoltre che il vincolo (2.3.c) impedisce riduzioni della capacità degli archi, sebbene non sia possibile escludere che tali riduzioni possano condurre a riduzioni del costo totale di viaggio.

Il problema della *selezione di un sottoinsieme di archi da realizzare*, nell'ipotesi di funzioni di costo separabili, può essere formulato nel seguente modo

$$\mathbf{y}^* = \underset{\mathbf{y}}{arg\,min}\ \ \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*)^T \mathbf{f}^* + \gamma \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y} \tag{2.4.a}$$

soggetto al vincolo:

$$\mathbf{f}^* = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y})\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y})^T \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*))\ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{g}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y})) \tag{2.4.b}$$

dove

- **y** è un vettore che ha tanti elementi quanti sono gli archi della rete potenzialmente realizzabili, e il cui generico elemento $\mathbf{y}_l$ assume valore unitario se l'arco l è realizzato e valore nullo altrimenti;
- $\bar{\mathbf{b}}$ è un vettore della stessa dimensione di **y**, il cui generico elemento $\bar{b}_l$ è il costo associato alla realizzazione dell'arco l.

Nella formulazione (2.4), a differenza del modello generale (2.1), le funzioni di costo non dipendono dal vettore delle variabili decisionali **y** in quanto queste intervengono solamente sulla topologia, e per l'ipotesi di separabilità delle funzioni di costo le prestazioni di ciascun arco sono indipendenti dagli altri archi.

È frequente in letteratura anche la seguente formulazione che, a differenza della (2.4), prevede di considerare il costo di investimento non come un obiettivo da minimizzare, ma come vincolo

$$\mathbf{y}^* = \underset{\mathbf{y}}{arg\,min}\ \ \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*)^T \mathbf{f}^* \tag{2.5.a}$$

soggetto ai vincoli:

$$\mathbf{f}^* = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y})\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y})^T \boldsymbol{c}(\mathbf{f}^*))\ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{g}(\mathbf{f}^*, \mathbf{y})) \tag{2.5.b}$$

$$\bar{\mathbf{b}}^{T}\mathbf{y} \leq b_{lim} \qquad (2.5.c)$$

dove la (2.5.c) è il cosiddetto *vincolo di budget*, e $b_{lim}$ è il budget disponibile, cioè il limite superiore della somma dei costi di realizzazione degli archi. Questo tipo di formulazione, a parte il vincolo comportamentale (2.5.b), è noto in letteratura come problema dello zaino[18].

[18] Il problema dello zaino simula la scelta di chi deve selezionare un insieme di oggetti (archi) cercando di massimizzare il vantaggio che essi forniscono (riduzione del tempo di viaggio) ma assumendo come vincolo la capacità di uno zaino di contenerli (budget) tenuto conto del loro volume (costo).

## 2.2. Algoritmi

Data l'enorme varietà di algoritmi proposti in letteratura, è molto difficile fornire una trattazione sistematica degli stessi. Il problema è ulteriormente complicato dal fatto che spesso gli algoritmi proposti si basano su particolari formulazioni del modello di progetto e pertanto risultano applicabili sono in particolari contesti.

Molti metodi sono stati analizzati nell'ambito di questo studio e per ciascuno di essi è disponibile una dettagliata descrizione del funzionamento dell'algoritmo e del modello di progetto al quale è applicato. Tali descrizioni sono riportate in un documento separato, mentre qui per esigenze di sintesi si riporta esclusivamente una classificazione degli algoritmi.

Il fattore maggiormente discriminante per gli algoritmi di progetto è costituito dalla natura delle variabili di progetto: gli algoritmi per modelli con variabili decisionali continue sono riportati nel paragrafo 2.2.1; quelli per modelli con variabili intere sono riportati nel paragrafo 2.2.2.

### 2.2.1. Algoritmi per modelli con variabili decisionali continue

La soluzione del problema di progetto con variabili continue è stata affrontata in letteratura seguendo due approcci diversi:

- il primo consiste nell'approssimare il problema con una semplificazione che lo renda più facilmente trattabile, e magari risolubile in maniera esatta;
- il secondo consiste nell'affrontare il problema cosi come è, cercando di individuare una soluzione la più vicina possibile all'ottimo, utilizzando algoritmi euristici.

Un esempio del primo approccio consiste nell'approssimare le funzioni di costo con una sequenza di tratti lineari [63]. Con questa approssimazione si può ottenere un problema di ottimizzazione bilivello in cui il comportamento degli utenti è simulato con l'equilibrio deterministico, caratterizzato da funzioni obiettivo e vincoli lineari. Tale problema lineare bilivello può essere risolto utilizzando un metodo iterativo che consiste nel risolvere un problema lineare ad un solo livello, modificando ad ogni iterazione una funzione obiettivo definita come combinazione convessa delle funzioni obiettivo superiore ed inferiore.

I metodi risolutivi che rientrano nel secondo approccio possono essere ulteriormente suddivisi in due gruppi:

- i metodi euristici che non garantiscono alcunché sulla soluzione individuata;
- i metodi che sono in grado di individuare un ottimo locale, ma non garantiscono il raggiungimento dell'ottimo globale.

Il primo gruppo, cioè quello costituito da metodi euristici che non offrono alcuna garanzia, sono spesso basati su algoritmi che alternano in due fasi distinte il calcolo dei flussi e il calcolo delle variabili decisionali.

Questa alternanza può essere effettuata avvicendando una fase in cui viene effettuata un'assegnazione di equilibrio ed una fase in cui viene effettuata l'ottimizzazione delle

variabili di progetto assumendo fissati i flussi calcolati nella precedente fase di assegnazione [5, 55]. È stato dimostrato che tali metodi non garantiscono la convergenza tanto meno verso un ottimo locale [99], anzi addirittura in alcuni casi possono convergere verso la peggiore soluzione [102].

L'alternanza fra la fase di calcolo dei flussi e quella di ottimizzazione delle variabili di progetto può essere riportata all'interno dell'algoritmo di assegnazione utilizzando l'Algoritmo delle Medie Successive modificato in modo tale da effettuare prima della procedura di calcolo dei costi una procedura che ottimizza le variabili di progetto [27, 29]. Di tali metodi non è garantita neanche la convergenza, ma presentano il vantaggio di essere piuttosto veloci.

Una maniera di procedere più efficace di quest'ultima, almeno dal punto di vista teorico, è il metodo dell'equilibrio decomposto [101]. Esso è basato sulla scomposizione del problema di ottimizzazione multidimensionale in più problemi monodimensionali interagenti: la funzione obiettivo viene decomposta in più funzioni, ciascuna riferita ad un singolo arco, che sono dette funzioni obiettivo di arco. L'algoritmo risolutivo procede a partire da un certo intervallo di ammissibilità per ciascun valore delle variabili decisionali associate all'arco, e riduce tale intervallo fintantoché esso risulta inferiore ad un prestabilito parametro di tolleranza. La riduzione degli intervalli avviene utilizzando algoritmi di ricerca lineare (bisezione, sezione aurea, Fibonacci, Newton, ecc.) [7]. Una volta individuato un vettore di variabili di progetto, secondo modalità che dipendono dall'algoritmo di ricerca lineare adottato, viene eseguita l'assegnazione e quindi vengono valutate le funzioni obiettivo di arco (o in alcuni casi le derivate rispetto alle variabili di progetto), dalle quali si ottengono le informazioni utili per ridurre ulteriormente gli intervalli dei valori delle variabili di progetto.

Fra i metodi del secondo gruppo, cioè quelli che sono in grado di individuare un ottimo locale, alcuni si basano su formulazioni alternative dell'equilibrio: quella di Tan Gershwin e Athans basata su un numero finito di disequazioni espresse in termini di variabili di percorso [52, 103], e quella di Marcotte basata su un numero finito di disequazioni, una per ciascun vertice del poliedro dei flussi ammissibili [70].

All'interno di questo secondo gruppo vi sono anche metodi [42] basati su algoritmi di ottimizzazione per funzioni non lineari con vincoli non lineari che richiedono l'utilizzo di un modello di assegnazione in forma chiusa (ad esempio basato su un modello di scelta del percorso di tipo Logit) per potere calcolare analiticamente le derivate del vincolo comportamentale rispetto alle variabili decisionali [42]. In alternativa è possibile utilizzare il metodo del gradiente proiettato applicato calcolando numericamente le derivate [28, 29].

Sempre all'interno di questo secondo gruppo vi sono metodi che si basano sull'utilizzo di direzioni di ricerca che nello stesso tempo garantiscono l'ottimizzazione delle variabili decisionali e il raggiungimento delle condizioni di equilibrio degli utenti: ad esempio i metodi della proiezione sul semispazio e della proiezione sul cono [34] o il metodo della lagrangiana aumentata [73].

### 2.2.2. Algoritmi per modelli con variabili intere

Anche la soluzione del problema di progetto con variabili intere è stata affrontata in letteratura seguendo due approcci diversi:

- il primo consiste nell'approssimare il problema con una semplificazione che lo renda più facilmente trattabile, e magari risolubile in maniera esatta;

- il secondo consiste nell'affrontare il problema cosi come è, cercando di individuare una soluzione la più vicina possibile all'ottimo.

Un esempio del primo approccio consiste nell'approssimare la funzione obiettivo, sostituendo al costo totale di viaggio il costo integrale, cioè l'area racchiusa sotto le funzioni di costo [88]. Ciò consente di individuare una soluzione esatta del problema oppure di utilizzare un più veloce algoritmo euristico.

I metodi risolutivi che rientrano nel secondo approccio possono essere ulteriormente suddivisi in tre gruppi:

- i metodi basati sull'enumerazione implicita delle soluzioni;
- i metodi basati su metaeuristiche;
- i metodi basati su euristiche dedicate.

Nel primo gruppo ricadono i metodi basati sul Branch and Bound, che tuttavia in alcuni casi [32] per limitare il numero di soluzioni esplorate e renderli praticamente applicabili a reti di dimensioni non eccessivamente ridotte si basano sul calcolo di limiti inferiori approssimati, e dunque sono euristici.

Il secondo gruppo ha ricevuto recentemente attenzione in letteratura [47], ed è quello su cui si basano gran parte degli algoritmi proposti in questo studio.

Nel terzo gruppo, l'algoritmo più noto è l'*Add and Delete* [17], che affronta il problema di selezionare all'interno di un certo insieme di archi potenziali quelli che consentono la minimizzazione della funzione obiettivo. L'algoritmo procede alternando due fasi: la prima nella quale vengono aggiunti degli archi della rete e la seconda nella quale vengono eliminati. In ciascuna delle due fasi le operazioni di aggiunta o eliminazione di archi sono effettuate solo nel caso in cui è garantito un miglioramento della funzione obiettivo. Quando in due successive fasi la funzione obiettivo non migliora (cosa che equivale a dire che non ci sono state né aggiunte né eliminazioni), allora l'algoritmo si arresta.

# CAPITOLO 3
# Modelli di progetto proposti

I sistemi di trasporto in ambito urbano negli ultimi decenni sono andati incontro a notevoli problemi dovuti all'incremento della domanda di trasporto che spesso non è stata adeguatamente bilanciata da un corrispondente aumento dell'offerta. Infatti da una parte la crescente concentrazione delle attività umane nelle aree urbane ha causato un aumento nei livelli della domanda, mentre dall'altra l'elevata densità di edifici e costruzioni presenti nelle aree urbane ha comportato una notevole difficoltà nel reperire gli spazi necessari per potenziare le infrastrutture di trasporto. Come risultato di questo processo molti sistemi di trasporto urbani sono oggi caratterizzati da elevati livelli di congestione che comportano un incremento dei tempi di viaggio e dei costi monetari per gli utenti del sistema e dell'inquinamento acustico e atmosferico.

La difficoltà nel costruire nuove infrastrutture di trasporto o ampliare quelle esistenti rende spesso improponibile nella pratica l'applicazione di alcuni dei modelli di progetto più diffusi in letteratura che utilizzano variabili decisionali associate ad interventi quali l'allocazione di nuovi rami oppure l'incremento della capacità degli archi esistenti (vedi paragrafo 2.1.4). In particolare risulta abbastanza irrealistico rappresentare l'incremento della capacità degli archi infrastrutturali esistenti con variabili decisionali continue, come se fosse possibile aumentare a piacimento la larghezza della carreggiata, riducendo nella stessa misura le dimensioni degli edifici adiacenti alla sede stradale.

Date le difficoltà operative che si riscontrano nell'effettuare la costruzione di nuove infrastrutture di trasporto o l'ampliamento di quelle esistenti, spesso nelle aree urbane le uniche possibilità di intervento consistono nell'indurre una variazione della ripartizione modale a favore dei modi di trasporto collettivo e nella riorganizzazione della circolazione stradale.

La variazione della ripartizione modale può essere ottenuta sia incoraggiando l'utilizzo dei mezzi di trasporto collettivo (ad esempio mediante l'incremento della frequenza delle linee esistenti, la messa in esercizio di nuove linee, la sostituzione dei mezzi obsoleti del parco veicolare con mezzi più confortevoli, etc.) sia scoraggiando l'utilizzo dei mezzi di trasporto individuale (ad esempio mediante l'introduzione di road pricing e park pricing). Deve comunque essere tenuto presente che in nuclei urbani di piccola e media dimensione l'efficacia di un servizio di trasporto collettivo non può essere spinta oltre certi livelli poiché l'assenza di direttrici caratterizzate da consistenti flussi di domanda renderebbe il servizio inefficiente.

La riorganizzazione della circolazione stradale consiste nel configurare opportunamente la topologia della rete intervenendo sui sensi di marcia e nel definire le modalità con cui i flussi di traffico possono servirsi delle intersezioni, cioè in altri termini nel definire le regole di precedenza per le intersezioni non semaforizzate e la struttura delle fasi, i tempi

di ciclo, i tempi di verde, e lo sfasamento fra i cicli per le intersezioni semaforizzate. Tali interventi di riorganizzazione della circolazione sono operativamente attuabili in maniera piuttosto semplice, sono eseguibili in tempi molto brevi e comportano investimenti trascurabili.

I modelli proposti in questo studio considerano variabili decisionali associate ad interventi di riorganizzazione della circolazione stradale. Tale scelta è stata effettuata proprio per il fatto che tali interventi risultano concretamente realizzabili in tempi brevi e con scarso impiego di risorse economiche. Pertanto è facile tradurre i risultati ottenuti dalla soluzione di modelli matematici in interventi concreti. Infatti la filosofia che sta alla base di questo studio è quella di proporre modelli e metodi risolutivi che non si limitano ad essere un fatto prevalentemente matematico, ma piuttosto siano un valido strumento di supporto alle decisioni.

La riorganizzazione della circolazione, come già detto, prevede due tipi di intervento: da una parte sulla topologia della rete (sensi di marcia degli archi) e dall'altra sulle prestazioni ai nodi (intersezioni semaforizzate e non semaforizzate). È possibile considerare modelli che intervengono soltanto sui nodi oppure congiuntamente sui nodi e sugli archi. Non è invece possibile considerare interventi solo sugli archi: le variazioni dei sensi di marcia comportano variazioni degli accessi alle intersezioni che richiedono una riconfigurazione delle stesse[1].

Il modello proposto per il progetto degli interventi sulle prestazioni ai nodi è descritto nel paragrafo 3.1; il modello proposto per il progetto congiunto degli interventi sulla topologia degli archi e sulle prestazioni ai nodi e descritto nel paragrafo 3.2.

[1] A titolo di esempio si pensi ad un arco stradale a senso unico, il cui senso di marcia nella configurazione attuale è tale che esso si allontana da una data intersezione semaforizzata. Se la configurazione di progetto prevede l'inversione del senso di marcia di tale arco, per esso non è previsto nessun tipo di regolazione semaforica all'intersezione (non vi è neanche la lanterna semaforica rivolta verso l'accesso) e pertanto è indispensabile definirne una nuova.

## 3.1. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: regolazione semaforica

Il progetto delle prestazioni ai nodi richiede di intervenire sulle regole di precedenza nelle intersezioni non semaforizzate e sulla struttura delle fasi, la regolazione semaforica (cioè i tempi di ciclo e i tempi di verde) e lo sfasamento fra i cicli per le intersezioni semaforizzate.

In questo studio si assume che tutti i nodi in progetto siano semaforizzati. Nonostante questa ipotesi è comunque possibile trattare in modo approssimato anche le intersezioni non regolate da semafori. È infatti possibile interpretare in termini di opportuna segnaletica di precedenza i tempi di verde che si ottengono come risultato della soluzione del modello proposto. Cioè, se si considera a titolo di esempio una intersezione a quattro braccia ortogonali, si può assumere una struttura fittizia del ciclo semaforico a due fasi, in ciascuna delle quali hanno verde gli accessi posti lungo una delle due direzioni che si intersecano ortogonalmente. Se la soluzione del modello prevede che i tempi di verde per le due fasi sono simili, allora l'intersezione può essere regolata mediante la regola di precedenza a destra. Se invece una delle due fasi è caratterizzata da un tempo di verde sensibilmente inferiore rispetto all'altro, allora in corrispondenza degli accessi relativi a tale fase può essere inserita un'opportuna segnaletica verticale di precedenza: "dare precedenza" oppure "fermarsi e dare precedenza".

Il progetto delle intersezioni semaforizzate può essere effettuato secondo differenti ipotesi, in particolare tre aspetti possono essere considerati:

- se la struttura delle fasi non è fissata a priori, cioè se viene progettato come gli accessi o le manovre relative ad un'intersezione devono essere raggruppate in fasi, e l'ordine delle fasi, allora il problema di progetto si dirà *stage-based*, altrimenti *phase-based* (nel primo caso è necessario considerare alcune variabili discrete che rappresentano le variabili di progetto associate alla struttura delle fasi);
- se si considera l'influenza dello sfasamento fra i piani di regolazione di due intersezioni adiacenti sui tempi di viaggio degli utenti che attraversano in sequenza tali intersezioni allora il problema di progetto si dirà *con coordinamento*, altrimenti *senza coordinamento* (nel primo caso è necessario considerare alcune variabili continue che rappresentano gli sfasamenti temporali fra i cicli delle intersezioni);
- se le variazioni della regolazione semaforica modificano la scelta del percorso degli utenti allora il problema di progetto si dirà *con scelta del percorso elastica*, altrimenti *con scelta del percorso rigida* (nel primo caso è necessario ricorrere alla simulazione dell'interazione fra la domanda e l'offerta per prevedere le risposte degli utenti alla modifiche imposte sulla rete, mentre nel secondo è sufficiente rilevare i flussi attuali sulla rete).

A seconda delle ipotesi fatte è possibile formulare modelli più o meno complessi. La classe più semplice consiste nei modelli phase-based, senza coordinamento, con scelta del percorso rigida. Sotto tali ipotesi il progetto di ciascuna intersezione può essere effettuato

indipendentemente dalle altre. In letteratura sono stati proposti molti modelli di questo tipo: il metodo di Webster [112, 113] che minimizza il ritardo in modo approssimato imponendo l'equisaturazione delle varie fasi[2]; il metodo SIGSET [4] che minimizza il ritardo totale; il metodo SIGCAP [6] che massimizza la capacità. La classe più complessa consiste nei modelli stage-based, con coordinamento, con scelta del percorso elastica. Nessun modello di questo tipo (con il relativo algoritmo risolutivo) è stato proposto in letteratura.

Il modello proposto si pone ad un livello intermedio di complessità: esso è phase-based, senza coordinamento, con scelta del percorso elastica. In questa classe di modelli vi è una letteratura molto ricca [5, 27, 28, 29, 55, 72, 99, 98, 102]. Il modello proposto considera come variabili decisionali i tempi di verde associati a ciascuna fase semaforica, o più precisamente i *tempi di verde efficace*, cioè la somma del tempo di verde propriamente detto e del tempo in cui la lanterna semaforica verde è accesa contemporaneamente a quella gialla, a cui viene sottratta la somma dei perditempo in avvio ed in conclusione di ogni fase. Il tempo di ciclo si assume fissato a priori. L'obiettivo consiste nella minimizzazione del tempo totale di viaggio sostenuto da tutti gli utenti del sistema. Si assume come vincolo comportamentale un modello di equilibrio stocastico degli utenti (SUE) con domanda rigida. Si assume inoltre che non vi siano vincoli esterni e che i vincoli tecnici garantiscano l'ammissibilità dei tempi di verde efficace.

Il modello proposto può essere formulato come segue

$$\mathbf{y}_C^* = \underset{\mathbf{y}_C}{arg\,min}\ \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)^T \mathbf{f}^* \tag{3.1.a}$$

soggetto ai vincoli:

$$\mathbf{f}_{SUE} = \boldsymbol{\Delta P}(-\boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C))\ \mathbf{d} \tag{3.1.b}$$

$$y_{C,i} \geq \bar{y}_{C,min} \qquad \forall i \in J_n \qquad \forall n \in N_C \tag{3.1.c}$$

$$\sum_{i \in J_n} y_{C,i} = t_n - t'_n \qquad \forall n \in N_C \tag{3.1.d}$$

con

- $N_C$ insieme dei nodi la cui regolazione semaforica deve essere progettata;
- $J_n$ insieme delle fasi relative all'intersezione associata al nodo n;
- $t_n$ tempo di ciclo dell'intersezione associata al nodo n;
- $t'_n$ somma dei perditempo per l'intersezione associata al nodo n;
- $y_{C,i}$ tempo di verde efficace associato alla generica fase i;
- $\mathbf{y}_C$ vettore dei tempi di verde efficace, costituito da tanti elementi quante sono le fasi appartenenti a tutte le intersezioni in progetto;
- $\mathbf{y}_C^*$ vettore dei tempi di verde efficace ottimi (la cui struttura è analoga ad $\mathbf{y}_C$);
- $\bar{y}_{C,min}$ tempo di verde efficace minimo.

[2] Cioè viene imposto che i rami di accesso all'intersezione più carichi per ciascuna fase siano caratterizzati dallo stesso rapporto fra flusso e capacità.

Nella Fig. 3.1 è illustrata la struttura del vettore $\mathbf{y}_C$ e sono esplicitati a titolo di esempio i vincoli tecnici (3.1.c) e (3.1.d). Il primo di questi vincoli garantisce che ogni fase sia caratterizzata da un tempo di verde efficace non inferiore ad una certa soglia. Il secondo garantisce che la somma dei tempi di verde efficace di tutte le fasi di una data intersezione eguagli il tempo di ciclo di quella intersezione al netto dei perditempo.

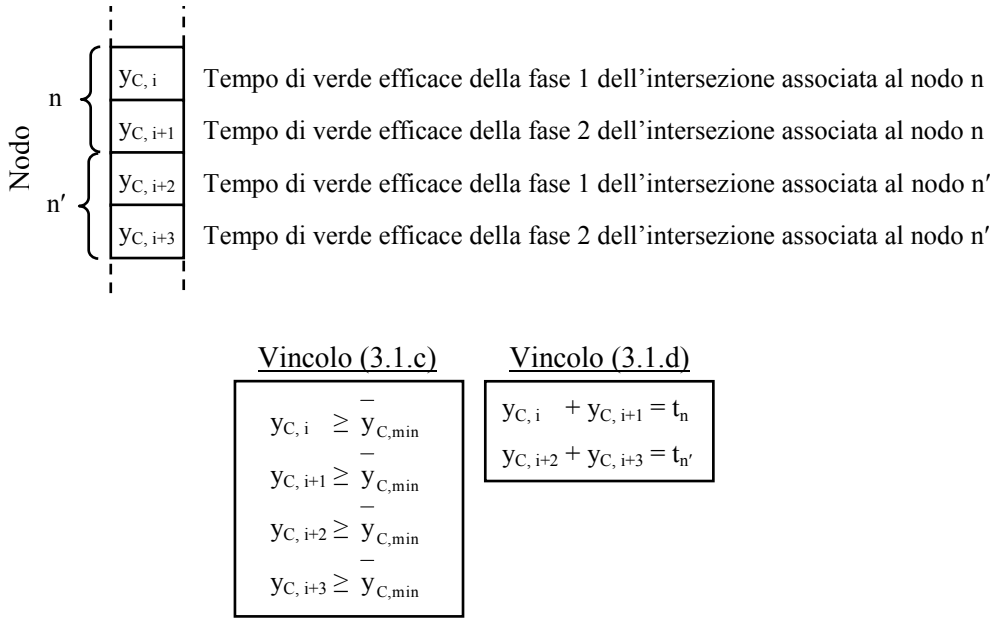



**Fig. 3.1 – Esempio di vettore dei tempi di verde efficace e dei vincoli tecnici associati a tali variabili**

La formulazione proposta può essere risolta con l'algoritmo presentato nel paragrafo 4.1 se il modello di scelta del percorso utilizzato è in forma chiusa. Pertanto è ad esempio possibile utilizzare il modello di scelta Logit Multinomiale o preferibilmente il modello C-Logit, che è in grado di tenere conto della sovrapposizione dei percorsi.

L'ipotesi di considerare la durata del ciclo fissata può facilmente essere rimossa, senza la necessità di dover apportare modifiche sostanziali né al modello proposto, né all'algoritmo risolutivo. Tuttavia deve essere tenuto presente che l'utilizzo di una durata del ciclo fissata a priori, ed in particolare uguale per tutti le intersezioni semaforizzate della rete, rende applicabile in una seconda fase una procedura di coordinamento delle intersezioni intervenendo sugli sfasamenti temporali fra i cicli delle intersezioni.

L'ipotesi di considerare la struttura delle fasi fissata a priori non può essere rimossa a meno che non si considera un algoritmo risolutivo differente da quello proposto[3].

È opportuno chiarire che il progetto di una rete di intersezioni avviene con un livello di dettaglio inferiore rispetto al progetto della singola intersezione. Infatti è naturale che durante il processo di pianificazione il livello di dettaglio utilizzato cresca

[3] Un possibile metodo risolutivo per trattare modelli che considerano come variabili decisionali sia le variabili intere associate alla struttura delle fasi, sia le variabili continue associate alla regolazione semaforica potrebbe essere del tutto analogo a quelli proposti nel paragrafo 4.2 per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica. La struttura delle fasi potrebbe essere trattata in maniera simile alla topologia della rete e, come sarà chiaro in seguito, essa potrebbe essere ottimizzata nella stessa fase in cui è ottimizzata la topologia. Tale approccio non è stato approfondito in questo studio.

progressivamente. È opportuno che il progetto della rete di intersezioni sia seguito dal progetto delle singole intersezioni, durante il quale vengono tenuti in conto alcuni aspetti che potrebbero condurre ad apportare lievi modifiche alla regolazione semaforica, oppure qualora si rendessero necessarie modifiche rilevanti è necessario tornare indietro al livello del progetto di rete tenendo conto degli aspetti emersi durante l'analisi di dettaglio della singola intersezione. A titolo di esempio di quanto detto sopra in merito al differente livello di dettaglio utilizzato nel progetto di una rete di intersezioni o di una singola intersezione, si consideri l'influenza dei tempi persi all'avvio e alla fine di ciascuna fase. Quando si progetta una rete di intersezioni è possibile effettuare una stima approssimata di tali quantità, mentre quando si progetta la singola intersezione è necessario ricavare tali grandezze nel modo più preciso possibile, rilevando le caratteristiche geometriche e funzionali della singola intersezione.

## 3.2. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: topologia e regolazione semaforica

Il modello di progetto congiunto degli interventi sulla topologia degli archi e sulle prestazioni ai nodi proposto in questo studio può essere inteso quale sviluppo del modello di progetto delle prestazioni ai nodi presentato nel paragrafo 3.1. Restano pertanto valide tutte le ipotesi e le considerazioni effettuate in precedenza.

Il progetto della topologia consente di intervenire sui sensi di marcia delle corsie. Data una corsia stradale, il modello determina una sua configurazione ottimale che può prevedere che il suo senso di marcia sia "in avanti" (cioè in una certa direzione convenzionale stabilita a priori), "in indietro" (cioè nella direzione opposta rispetto a quella convenzionalmente stabilita) oppure sia chiusa al traffico veicolare e pertanto possa essere utilizzata per la sosta dei veicoli o per realizzare spazi destinati alla collettività o alle utenze deboli. Ragionando in termini dell'intera carreggiata stradale, essa può essere a senso unico "in avanti", a senso unico "in indietro", a doppio senso di marcia (solo se sono presenti almeno due corsie) oppure chiusa al traffico.

In letteratura il progetto della topologia è quasi sempre stato affrontato considerando la possibilità che un arco sia costruito o meno [17, 32], mentre raramente è stata considerata la possibilità di invertire il senso di marcia esistente [47]. Per quanto detto nell'introduzione di questo capitolo è evidente che la seconda possibilità è molto più realisticamente attuabile in un tipico contesto urbano. Il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica è stato affrontato in un solo caso in letteratura [24], che può essere considerato il punto di partenza dal quale questo studio si è sviluppato.

Il modello proposto considera come variabili decisionali i tempi di verde efficace e la configurazione dei sensi di marcia delle corsie. Ciascuna variabile che regola la configurazione dei sensi di marcia non è in generale associata ad un singolo arco (o coppia di archi) della rete, ma ad un insieme di archi (o di coppie di archi) contigui con caratteristiche geometriche simili, che è detto *sequenza*. In modo del tutto analogo al modello (3.1) si assumono le seguenti ipotesi: l'obiettivo consiste nella minimizzazione del tempo totale di viaggio sostenuto da tutti gli utenti del sistema; il vincolo comportamentale è un modello di equilibrio stocastico degli utenti (SUE) con domanda rigida; non vi sono vincoli esterni e i vincoli tecnici garantiscono l'ammissibilità dei tempi di verde efficace.

Il modello proposto può essere formulato come segue

$$\mathbf{y}_C^*, \mathbf{y}_T^* = \underset{\mathbf{y}_C, \mathbf{y}_T}{arg\,min}\ \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)^T \mathbf{f}_{SUE} \tag{3.2.a}$$

soggetto ai vincoli:

$$\mathbf{f}_{SUE} = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y}_T)\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{y}_T)^T \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C))\ \mathbf{d} \tag{3.2.b}$$

$$y_{C,i} \geq \bar{y}_{C,min} \qquad \forall i \in J_n \qquad \forall n \in N_C \tag{3.2.c}$$

$$\sum_{i \in J_n} y_{C,i} = t_n - t'_n \qquad \forall n \in N_C \tag{3.2.d}$$

con

- $\mathbf{y}_T$ vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze, costituito da tanti elementi quante sono le sequenze in progetto;
- $\mathbf{y}_T^*$ vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze ottime (la cui struttura è analoga ad $\mathbf{y}_T$).

Nella formulazione non è esplicitata la dipendenza della funzione obiettivo dal vettore delle configurazioni topologiche $\mathbf{y}_T$, ma essa ne è comunque influenzata sia perché tale vettore interviene nel vincolo comportamentale (3.2.b), sia perché gli elementi di cui constano i vettori dei flussi e dei costi di arco dipendono da esso.

Il generico elemento del vettore $\mathbf{y}_T$ associato alla sequenza i, indicato con $\mathbf{y}_{T,i}$, può assumere valori discreti, ciascuno dei quali è associato ad una configurazione topologica della sequenza. Utilizzando come simboli di tali valori i numeri interi, la generica variabile $\mathbf{y}_{T,i}$ può assumere i seguenti valori:

- 0 se la sequenza è chiusa al traffico veicolare;
- 1 se la sequenza è a senso unico "in avanti";
- 2 se la sequenza è a senso unico "in indietro";
- 3 se la sequenza è a doppio senso di marcia.

La configurazione 3 può essere assunta solo dalle variabili decisionali associate a sequenze con almeno due corsie di marcia. Pertanto, indicato con $L_1$ l'insieme delle sequenze con una corsia di marcia e con $L_2$ le sequenze con almeno due corsie di marcia, il numero totale di possibili configurazioni topologiche delle sequenze è $3^{|L_1|} \cdot 4^{|L_2|}$. Ci si trova di fronte ad un problema di ottimizzazione combinatoria, il cui numero di possibili soluzioni cresce esponenzialmente. Nella Fig. 3.2 è rappresentato in scala logaritmica il numero di soluzioni di possibili configurazioni topologiche al variare del numero di sequenze in progetto. Le due rette rappresentano tale numero nelle due ipotesi estreme che la totalità delle sequenze sia costituita da una sola corsia di marcia oppure che la totalità delle sequenze sia costituita da almeno due corsie di marcia. Nei casi intermedi il numero di possibili configurazione assume un valore compreso fra le due rette. Il significato pratico di questo grafico può essere compreso analizzando il tempo necessario per esaminare con una ricerca esaustiva tutte le soluzioni. Se si assume ottimisticamente che per analizzare una soluzione sia sufficiente un centesimo di secondo[4], allora nel caso di 10 sequenze con una sola corsia di marcia è necessario un tempo di circa 10 secondi, nel caso di 20 sequenze servono circa 400 giorni e nel caso di 30 sequenze sono necessari circa 65˙000 anni.

La codifica proposta delle variabili decisionali associate alle sequenze non è in grado di rappresentare alcuni casi particolari di configurazione delle corsie di marcia. In particolare non è possibile rappresentare il caso in cui un certo numero di corsie è allocato in una direzione ed un numero differente è allocato nella direzione opposta ed il caso in cui un certo numero di corsie (ma non tutte) sono chiuse al traffico. Qualora si dovessero ritenere significativi questi casi è possibile codificare ogni variabile per mezzo di una terna di

[4] Con gli attuali strumenti di calcolatale tempo è possibile solo per reti molto piccole, spesso non significative da un punto di vista pratico.

valori, che rappresentano ordinatamente: il numero di corsie "in avanti", il numero di corsie "in indietro" e il numero di corsie chiuse al traffico veicolare. Questo tipo di codifica comporta una crescita del numero di possibili configurazioni topologiche a parità del numero di sequenze di progetto. Nella Fig. 3.3 sono riportati alcuni esempi di codifica delle configurazioni topologiche di una sequenza.

Nella scelta delle sequenze e delle intersezioni in progetto è opportuno che ciascun nodo che sia posto agli estremi di un arco incluso in una sequenza di progetto sia considerato come intersezione in progetto. In caso contrario, a seguito di variazioni dei sensi di percorrenza delle corsie, è possibile che la regolazione semaforica preesistente divenga inadeguata o peggio incompatibile con la nuova configurazione.

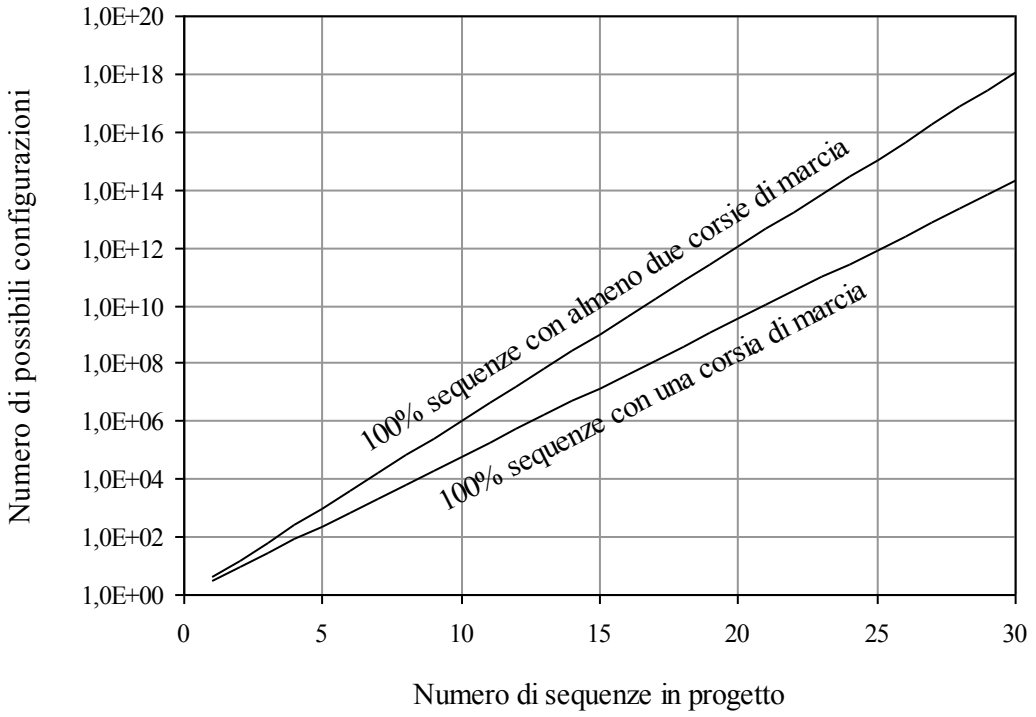
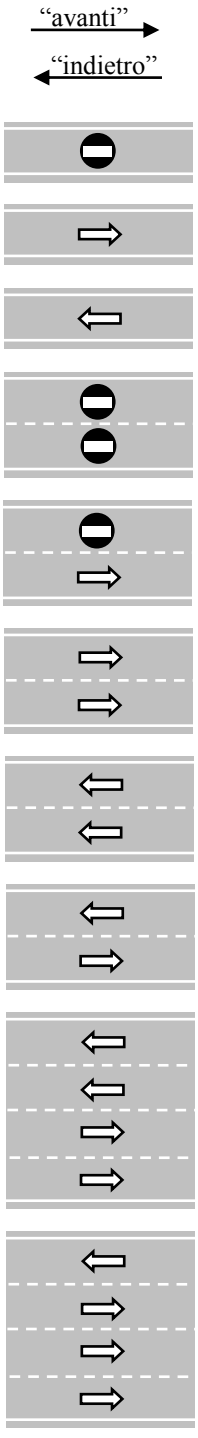



**Fig. 3.2 – Numero di possibili configurazioni topologiche al variare del numero di sequenze in progetto**




| | Tipo di codifica | |
|---|---|---|
| | Unico valore | Terna di valori |
| | 0 | (0, 0, 1) |
| | 1 | (1, 0, 0) |
| | 2 | (0, 1, 0) |
| | 0 | (0, 0, 2) |
| | Non possibile | (1, 0, 1) |
| | 1 | (2, 0, 0) |
| | 2 | (0, 2, 0) |
| | 3 | (1, 1, 0) |
| | 3 | (2, 2, 0) |
| | Non possibile | (3, 1, 0) |

**Fig. 3.3 – Esempi di codifica delle configurazioni topologiche di una sequenza**

# CAPITOLO 4
# Algoritmi di progetto proposti

In questo capitolo sono descritti gli algoritmi risolutivi proposti per i modelli presentati nel capitolo precedente. Data la difficoltà associata all'individuazione di una soluzione esatta dei problemi trattati, tutti gli algoritmi proposti sono di tipo euristico. Tale scelta deriva dalla necessità di assicurare l'individuazione di una buona soluzione in tempi ragionevoli, nel rispetto del filo conduttore di questo studio che è quello di proporre metodi che siano effettivamente ed efficacemente applicabili nella realtà.

Per il problema di progetto della regolazione semaforica formulato nel paragrafo 3.1 è stato proposto un algoritmo del gradiente proiettato. L'elemento innovativo di tale algoritmo è la direzione di ricerca proposta che, grazie all'utilizzo di un modello di assegnazione in forma chiusa, può essere calcolata analiticamente con conseguente notevole vantaggio in termini di tempo di calcolo e precisione rispetto ai metodi numerici. Tale direzione di ricerca è un antigradiente approssimato, in quanto è in grado di tenere in conto solo parzialmente della risposta degli utenti alle modifiche imposte alla regolazione semaforica. Poiché non è garantito che tale direzione di ricerca sia una direzione di discesa, non può conseguentemente essere garantita la convergenza verso un minimo locale. Deve comunque essere tenuto presente che anche senza l'introduzione di tale approssimazione l'algoritmo avrebbe consentito al più di individuare un ottimo locale del problema in quanto la funzione obiettivo non è in generale convessa.

In letteratura non è stato proposto nessun algoritmo esatto che riesce ad individuare l'ottimo globale del problema dell'individuazione della regolazione semaforica ottima con vincolo comportamentale di equilibrio degli utenti.

Per il problema di progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica, formulato nel paragrafo 3.2, sono stati proposto parechi algoritmi. La struttura generale di tutti i metodi risolutivi proposti è articolata in due fasi: durante la prima si agisce sulle variabili intere (topologia della rete), mentre nella seconda si agisce sulle variabili continue (regolazione semaforica) assumendo fissata la topologia della rete. Per affrontare il problema costituito dalla prima fase diverse metaeuristiche sono state specificate, utilizzandole sia singolarmente sia in modo ibrido con differenti definizioni di intorno. Il problema costituito dalla seconda fase, essendo la topologia fissata, si riduce al problema della regolazione semaforica formulato nel paragrafo 3.1, e pertanto può essere risolto con il relativo algoritmo risolutivo proposto in questo studio, o comunque con altri algoritmi risolutivi. Data la difficoltà del problema trattato che è misto intero di tipo combinatorio (si veda il paragrafo 3.2 per ulteriori chiarimenti) nessun metodo risolutivo esatto è stato proposto.

In letteratura non sono stati proposti metodi esatti. È opportuno precisare che tale problema è stato affrontato in un solo caso in letteratura [24], nel quale viene proposta la

stessa struttura generale del metodo risolutivo qui utilizzato e che può essere considerato il punto di partenza dal quale questo studio si è sviluppato.

Nel paragrafo 4.1 è descritto l'algoritmo risolutivo proposto per il problema di progetto della regolazione semaforica; sono inoltre riportate altre considerazioni che scaturiscono dagli aspetti teorici approfonditi per lo sviluppo dell'algoritmo. Nel paragrafo 4.2 è descritto l'algoritmo risolutivo proposto per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica.

# 4.1. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: regolazione semaforica

In questo paragrafo è descritto l'algoritmo proposto per la soluzione del modello di progetto della regolazione semaforica con riferimento alla formulazione (3.1). Il metodo proposto per l'ottimizzazione è l'algoritmo del gradiente proiettato. Per ridurre i tempi di calcolo del gradiente è stato proposto un metodo approssimato per il suo calcolo.

Il calcolo di tale direzione di ricerca richiede a sua volta il calcolo di alcune matrici i cui elementi rappresentano la probabilità che un utente diretto da una certa origine ad una certa destinazione utilizzi un percorso che comprende ordinatamente [1] due archi assegnati. Ciascuna di queste matrici è associata ad una coppia origine-destinazione ed è stata definita *matrice delle probabilità congiunte*.

La stuttura generale dell'algoritmo proposto è descritta nel paragrafo 4.1.1; essa non presenta aspetti innovativi ed è comune a molti metodi proposti in letteratura. La direzione di ricerca proposta è discussa nel paragrafo 4.1.2. Nel paragrafo 4.1.3 è definita in dettaglio la matrice delle probabilità congiunte di arco e vengono introdotte altre matrici che derivano immediatamente da questa. Nel paragrafo 4.1.4 sono descritti alcuni possibili utilizzi delle matrici introdotte nel paragrafo 4.1.3.

## 4.1.1. Struttura generale dell'algoritmo

L'algoritmo proposto, partendo da una configurazione iniziale della regolazione semaforica $\mathbf{y}_{C,0}$, ad ogni iterazione i alterna le seguenti due fasi:

1. *Aggiornamento dei flussi*
   Noto il vettore delle regolazione semaforica calcolate all'iterazione precedente $\mathbf{y}_C^{(i-1)}$ è effettuata una assegnazione di equilibrio, dalla quale si ottiene il vettore dei flussi di equilibrio $\mathbf{f}_{SUE}^{(i)}$. La funzione obiettivo $w(\mathbf{f}_{SUE}^{(i)}, \mathbf{y}_C^{(i-1)})$ può essere valutata in modo esatto effettuando il prodotto fra il vettore dei flussi e quello dei costi[2].
2. *Aggiornamento delle variabili decisionali*
   È calcolata una direzione di spostamento costituita dall'antigradiente approssimato $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{y}_C}$, calcolato rispetto alle sole variabili decisionali $\mathbf{y}_C$ nel punto $(\mathbf{f}_{SUE}^{(i)}, \mathbf{y}_C^{(i-1)})$. Le variabili decisionali sono modificate effettuando uno spostamento di passo $\mu^{(i)}$ nella direzione di ricerca calcolata, proiettata sull'insieme di ammissibilità delle variabili decisionali $S_y$, che è un poliedro convesso definito dai vincoli lineari (3.1.c) e (3.1.d).

[1] Il termine "ordinatamente" deve intendersi nel senso che l'utente percorrendo un percorso che include i due archi attraversa sempre prima un arco e poi l'altro.

[2] La funzione obiettivo deve essere calcolata con il vettore della regolazione calcolata all'iterazione precedente $\mathbf{y}_C^{(i-1)}$ e il vettore dei flussi di arco calcolati nell'iterazione corrente $\mathbf{f}_{SUE}^{(i)}$, poiché sono questi i flussi che garantiscono il rispetto del vincolo comportamentale degli utenti.

Nella scelta del passo $\mu^{(i)}$ si è optato per un valore costante sufficientemente piccolo. Sarebbe opportuno effettuare una ricerca lineare, che tuttavia richiederebbe una specificazione particolare dal momento che non è garantita né la convessità della funzione obiettivo né che la direzione di ricerca sia una condizione di discesa. La scelta effettuata di utilizzare un passo costante molto piccolo comporta una scarsa efficienza dell'algoritmo, e pertanto la scelta di una opportuna regola per determinare il passo passo $\mu^{(i)}$ merita di essere ulteriormente approfondita e sviluppata.

La condizione di arresto può essere imposta sulla norma del gradiente approssimato

$$\| \widetilde{\nabla}_{\mathbf{y}_C} (\mathbf{f}_{SUE}^{(i)}, \mathbf{y}_C^{(i-1)}) \| < \omega$$

oppure sulla norma della differenza di due vettori di regolazioni ottenute in iterazioni successive

$$\| \mathbf{y}_C^{(i)} - \mathbf{y}_C^{(i-1)} \| < \omega$$

con $\omega$ costante positiva. Data la natura euristica del metodo, che utilizza una direzione di ricerca per la quale non è garantita la condizione di discesa, un'altra possibilità è quella di arrestare l'algoritmo quando la funzione obiettivo peggiora

$$w(\mathbf{f}_{SUE}^{(i)}, \mathbf{y}_C^{(i-1)}) > w(\mathbf{f}_{SUE}^{(i-1)}, \mathbf{y}_C^{(i-2)})$$

Il diagramma di flusso dell'algoritmo proposto è rappresentato nella Fig. 4.1.

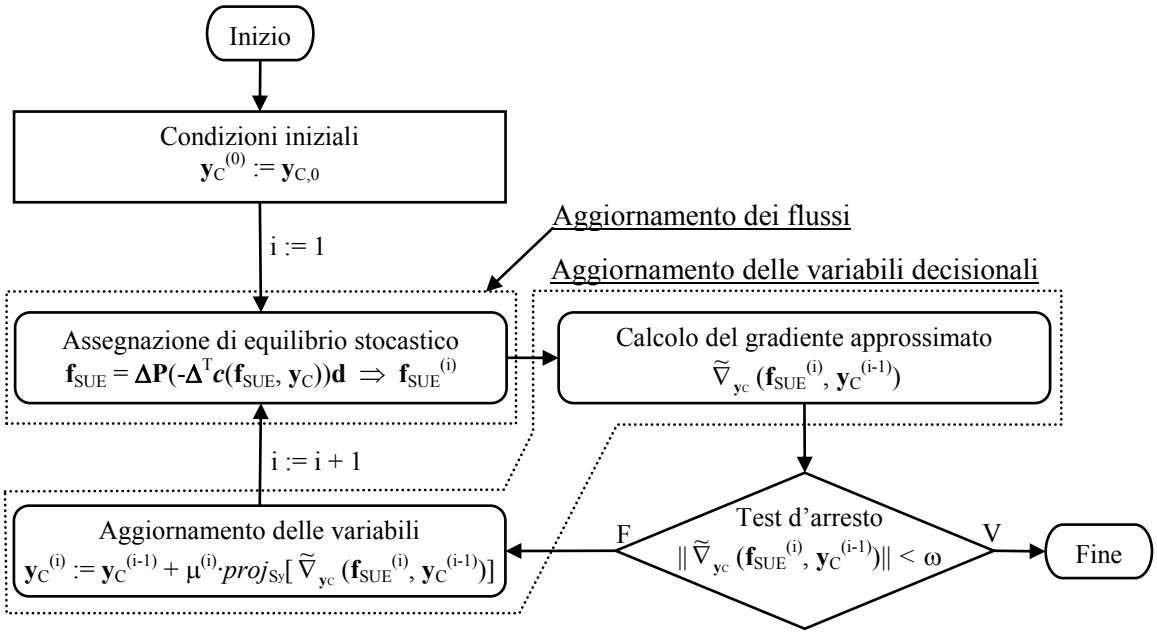



**Fig. 4.1 - Struttura generale dell'algoritmo di progetto della regolazione semaforica**

## 4.1.2. Direzione di ricerca

Il calcolo della direzione di ricerca è l'elemento peculiare ed innovativo che caratterizza l'algoritmo proposto. Nel seguito è descritto nel dettaglio come questa direzione è calcolata.

Il vincolo comportamentale (3.1.a) può essere scritto in modo del tutto equivalente servendosi della funzione di carico stocastico della rete $\boldsymbol{f}_{SNL}(\bullet)$

$$\mathbf{f}_{SUE} = \boldsymbol{f}_{SNL}(\boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C), \mathbf{d}) \tag{4.1}$$

La funzione obiettivo del modello (3.1) può essere riscritta sostituendo il vettore dei flussi di equilibrio stocastico $\mathbf{f}_{SUE}$ con la funzione di carico stocastico della rete, secondo quanto previsto dalla (4.1). Omettendo di riportare la dipendenza dal vettore di domanda **d**, che si è costante avendo assunto la domanda rigida, si ottiene

$$w(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C) = \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)^T \boldsymbol{f}_{SNL}(\boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)) \tag{4.2}$$

Nonostante la sostituzione effettuata, la (4.2) dipende sempre dal vettore $\mathbf{f}_{SUE}$ perché comunque la (4.1) esprime una dipendenza ricorsiva. Deve essere osservato che tuttavia nella (4.2) la dipendenza dai flussi non è più diretta ma avviene solo tramite le funzioni di costo.

Il generico i-esimo elemento del gradiente della (4.2) rispetto al vettore delle variabili decisionali, cioè la derivata della funzione obiettivo rispetto al tempo di verde efficace $y_{C,i}$ è dato dalla seguente espressione

$$\frac{\partial w(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)}{\partial y_{C,i}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)}{\partial y_{C,i}}\right]^T \boldsymbol{f}_{SNL}\left(\boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)\right) + \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)^T \left[\frac{\boldsymbol{f}_{SNL}\left(\boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)\right)}{\partial y_{C,i}}\right]$$

la quale, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, e considerando la relazione (4.1), diviene

$$\frac{\partial w(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)}{\partial y_{C,i}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)}{\partial y_{C,i}}\right]^T \mathbf{f}_{SUE} + \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)^T \boldsymbol{Jac}\left[\boldsymbol{f}_{SNL}(\mathbf{c})\right] \left[\frac{\partial \boldsymbol{c}(\mathbf{f}_{SUE}, \mathbf{y}_C)}{\partial y_{C,i}}\right]$$

Il calcolo dell'i-esimo termine del gradiente richiede di calcolare

- lo jacobiano della funzione di carico stocastico della rete rispetto ai costi (tale matrice è identica per ogni termine del gradiente, e dunque è sufficiente calcolarla una sola volta);
- il vettore delle derivate delle funzioni di costo rispetto alla variabile $y_{C,i}$.

Lo jacobiano della funzione di carico della rete rispetto ai costi può essere calcolato analiticamente. Il generico termine di questo jacobiano, cioè la derivata del termine della funzione di carico stocastico della rete associato ad un generico arco l rispetto al costo relativo ad un gereico arco l′, può essere espresso nel seguente modo

$$\frac{\partial f_{SNL,l}(\mathbf{c})}{\partial c_{l'}} = \frac{\partial}{\partial c_{l'}}\left(\sum_{rs\in RS} d_{rs} m_{l,rs}\right) = \sum_{rs\in RS} d_{rs} \sum_{k\in K_{rs}} \delta_{lk} \frac{\partial}{\partial c_{l'}} p_{rs,k} \tag{4.3}$$

dove, oltre ai simboli introdotti in precedenza, $f_{SNL,l}$ rappresenta il termine della funzione di carico stocastico della rete che restituisce il flusso dell' arco l. La probabilità di scelta del percorso $p_{rs,k}$ può essere esplicitata in forma chiusa, avendo assunto l'utilizzo di un modello di scelta C-Logit. Pertanto la (4.3) diviene

$$\frac{\partial f_{SNL,l}(\mathbf{c})}{\partial c_{l'}} = \sum_{rs\in RS} d_{rs} \sum_{k\in K_{rs}} \delta_{lk} \frac{\partial}{\partial c_{l'}} \frac{exp\left(\left(-g_k - c_{F,k}\right)/\vartheta\right)}{\sum_{k'\in K_{rs}} exp\left(\left(-g_{k'} - c_{F,k}\right)/\vartheta\right)} =$$

$$= \sum_{rs\in RS} d_{rs}\left(-\sum_{k\in K_{rs}} \delta_{lk}\delta_{l'k} p_{rs,k} + \sum_{k\in K_{rs}} \delta_{lk} p_{rs,k} \sum_{k'\in K_{rs}} \delta_{l'k'} p_{rs,k'}\right) =$$

$$= \sum_{rs\in RS} d_{rs}\left(-\sum_{k\in K_{rs}} \delta_{lk}\delta_{l'k} p_{rs,k} + \sum_{k\in K_{rs}} \delta_{lk} p_{rs,k} \sum_{k'\in K_{rs}} \delta_{l'k'} p_{rs,k'}\right) =$$

$$= \sum_{od} d_{od}\left(-m_{rs,l\to l'} - m_{rs,l'\to l} + m_{l,rs} m_{l',rs}\right)$$

in cui il termine $m_{rs,l\to l'}$ rappresenta la probabilità che un utente diretto dall'origine r alla destinazione s utilizzi un percorso che comprende ordinatamente gli archi l ed l′. Nel caso in cui l ed l′ coincidono si assume convenzionalmente

$$m_{rs,l\to l} = ½\, m_{rs,l}$$

Il modo in cui tali termini possono essere calcolati è descritto nel paragrafo 4.1.3.

Per il calcolo del vettore delle derivate delle funzioni di costo, si assume che la funzione di costo utilizzata sia del tipo BPR, modificata opportunamente rispetto alla (1.4) per tenere conto della presenza del parametro di regolazione: al denominatore invece della capacità dell'arco l vi è il prodotto del tempo di verde efficace dell'arco l per il *flusso di saturazione* dell'arco l che rappresenta la capacità dell'arco nell'ipotesi in cui vi fosse sempre verde. L'espresione che si ottiene è la seguente

$$c_l = c_l\left(f_l, y_{C,\{l\}}\right) = c_{0,l}\left(1 + \alpha\left(\frac{f_l}{y_{C,\{l\}} c_{S,l}}\right)^{\beta}\right) \tag{4.4}$$

dove, oltre ai simboli introdotti in precedenza,

- $y_{C,\{l\}}$ è il tempo di verde efficace relativo all'arco l;[3]
- $c_{S,l}$ è il flusso di saturazione dell'arco l.

[3] Si tenga presente che in generale il tempo di verde efficace non è associato ad un arco ma ad una fase, pertanto più archi potrebbero essere caratterizzati dallo stesso tempo di verde efficace.

L'ipotesi di utilizzare una funzione di costo di tipo BPR non è assolutamente vincolante, in quanto è possibile utilizzare qualsiasi funzione di costo che sia separabile, derivabile fino al primo ordine e monotona strettamente crescente. Sebbene esistano funzioni di costo più adatte per simulare il ritardo dovuto ad intersezioni semaforizzate nel seguito ci si riferirà alla funzione BPR a titolo di esempio per la sua semplicità.

Il calcolo della derivata parziale della (4.4) rispetto ad un generico tempo di verde efficace $y_{C,i}$ deve tenere conto che il flusso $f_l$ dipende dalla variabile $y_{C,i}$ attraverso la funzione composta dalla funzione di carico stocastico e dalle funzioni di costo come si può osservare dalla (4.1). Pertanto, tenendo conto di tale dipendenza, ed utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte si ottiene la seguente espressione

$$\frac{\partial c_l\left(f_l, y_{C,\{l\}}\right)}{\partial y_{C,i}} = \frac{c_{0,l}\alpha\beta}{c_{S,l}{}^{\beta}}\left(\frac{f_l}{y_{C,\{l\}}}\right)^{\beta-1} \frac{\left(\nabla f_{SNL,l}(\mathbf{c})\right)^T \frac{\partial \boldsymbol{c}\left(\mathbf{f}, \mathbf{y}_C\right)}{\partial y_{C,i}} y_{C,\{l\}} - f_l \tau_{l,i}}{\left(y_{C,\{l\}}\right)^2} \tag{4.5}$$

in cui $\tau_{l,i}$ è un termine di incidenza fra l'arco l e la fase i, che assume valore unitario se l'arco l è associato alla fase i, mentre assume valore nullo in caso contrario. L'espressione (4.5), scritta per ogni arco l appartenente all'insieme degli archi della rete L, costituisce un sistema di $|L|$ equazioni dalla cui soluzione è possibile ricavare il vettore delle derivate delle funzioni di costo rispetto alla variabile $y_{C,i}$. La soluzione di tale sistema lineare è onerosa in termini di tempo di calcolo, poiché esso può essere risolto con algoritmi aventi una complessità computazionale $O(|L|^3)$. Pertanto si propone di approssimare il problema assumendo costante il vettore dei flussi f, che viene posto pari al vettore dei flussi di equilibrio calcolato nella fase 1 dell'algoritmo. Infatti, se si assume fissata la variabile la variabile $f_l$, allora la derivata parziale della (4.4) diventa

$$\frac{\partial c_l\left(f_l, y_{C,\{l\}}\right)}{\partial y_{C,i}} = -c_{0,l}\alpha\beta\left(\frac{f_l}{c_{S,l}}\right)^{\beta} \frac{\tau_{l,i}}{\left(y_{C,\{l\}}\right)^{\beta+1}}$$

e pertanto tutti i termini in cui $\tau_{l,i}$ vale zero sono nulli.

In sintesi la direzione di ricerca proposta è costituita dal gradiente della funzione obiettivo scritta nella forma (4.2) rispetto al vettore delle variabili decisionali. Tale gradiente è calcolato assumendo che il vettore dei flussi di equilibrio stocastico $\mathbf{f}_{SUE}$ che interviene nella funzione obiettivo sia costante e pertanto non dipende dalle variabili decisionali, come in realtà dovrebbe essere. Tale direzione di ricerca tiene parzialmente conto del comportamento degli utenti: in particolare si tiene conto della risposta degli utenti alle variazioni dei parametri della regolazione semaforica, ma non si riesce a tenere conto di come le variazioni dei flussi influenzano i costi degli archi (e quindi a sua volta le scelte degli utenti). Ciò è dovuto alla forma in cui è stata scritta la (4.2), nella quale le funzioni di costo dipendono dai flussi che si assumono costanti (e pertanto non si riesce a simulare come la variazione dei flussi modifica i costi).

### 4.1.3. Matrici delle probabilità congiunte e matrici dei flussi congiunti

I termini introdotti nel paragrafo precedente per rappresentare la probabilità che un utente di una generica coppia origine-destinazione rs attraversi un arco o una coppia di archi

possono essere convenientemente rappresentati per mezzo della matrice delle probabilità congiunte, indicata col simbolo $\hat{\mathbf{M}}_{rs}$. Si tratta di una matrice quadrata di dimensione $|L|\times|L|$ in cui

- il generico elemento sualla diagonale principale $m_{rs,l}$ associato alla riga ed alla colonna l rappresenta la probabilità che un utente diretto dall'origine r alla destinazione s attraversi l'arco l;
- il generico elemento extradiagonale $m_{rs,l\to l'}$ associato alla riga l ed alla colonna l′ rappresenta la probabilità che un utente diretto dall'origine r alla destinazione s attraversi prima l'arco l e poi l'arco l′.

I termini sulla diagonale principale sono equivalenti ai termini della riga della matrice di assegnazione associata alla stessa coppia origine-destinazione.

È stato proposto un algoritmo per calcolare i termini della matrice $\hat{\mathbf{M}}_{rs}$ in forma chiusa valido se si utilizza un modello di scelta del percosto Logit Multinomiale (o C-Logit) e l'algoritmo di assegnazione di Dial. Tale metodo generalizza il metodo proposto da Van Vliet [108] per il calcolo della probabilità di attraversamento di una coppia di nodi. Le espressioni per calcolare i termini della matrice $\hat{\mathbf{M}}_{rs}$, con riferimento alla Fig. 4.2, sono

$$m_{rs,l} = \frac{\hat{W}_{r,n'}\hat{w}_{(n',n'')}\hat{W}_{n'',s}}{\hat{W}_{r,s}}$$

$$m_{rs,l\to l'} = \frac{\hat{W}_{r,n'}\hat{w}_{(n',n'')}\hat{W}_{n'',n'''}\hat{w}_{(n''',n'''')}\hat{W}_{n'''',s}}{\hat{W}_{r,s}}$$

dove $\hat{W}_{n',n''}$ è il *peso della coppia di nodi* n′-n″ secondo la definizione di Van Vliet [108]. L'algoritmo ha una complessità computazionale $O(|RS|\cdot|N|^2)$; tale complessità non è riducibile poiché i termini $\hat{W}$ sono $|RS|\cdot|N|^2$.

È stata inoltre definita una *matrice dei flussi congiunti* della coppia origine-destinazione rs, che si può ottenere facilmente a partire dalla matrice delle probabilità congiunte

$$\hat{\mathbf{F}}_{rs} = d_{rs}\hat{\mathbf{M}}_{rs}$$

È possibile inoltre definire una matrice dei flussi congiunti complessiva, data dalla somma sulle coppie origine-destinazione delle matrici dei flussi congiunti, cioè

$$\hat{\mathbf{F}} = \sum_{rs\in RS}\hat{\mathbf{F}}_{rs} = \sum_{rs\in RS} d_{rs}\hat{\mathbf{M}}_{rs}$$

Nella matrice dei flussi congiunti complessiva

- il generico elemento sualla diagonale principale $f_l$ associato alla riga ed alla colonna l rappresenta il flusso sull'arco l;
- il generico elemento extradiagonale $f_{l\to l'}$ associato alla riga l ed alla colonna l′ rappresenta la somma dei flussi di percorso che attraversano prima l'arco l e poi l'arco l′.

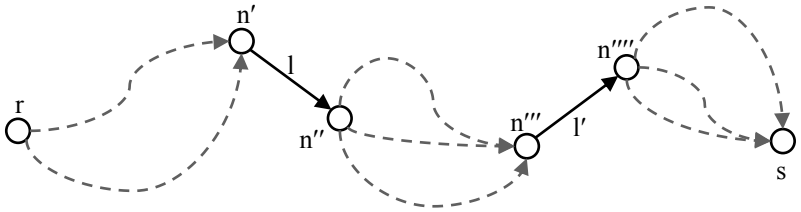



**Fig. 4.2 – Esempio di rete utilizzato per il calcolo dei termini della matrice delle probabilità congiunte**

## 4.1.4. Applicazioni delle matrici dei flussi congiunti

Di seguito sono proposti alcuni esempi di applicazione dalle matrici dei flussi congiunti per il problema del progetto coordinato di due o più intersezioni semaforiche in sequenza. In questo caso si rivela opportuno conoscere informazioni congiunte sulle manovre eseguite nelle due intersezioni.

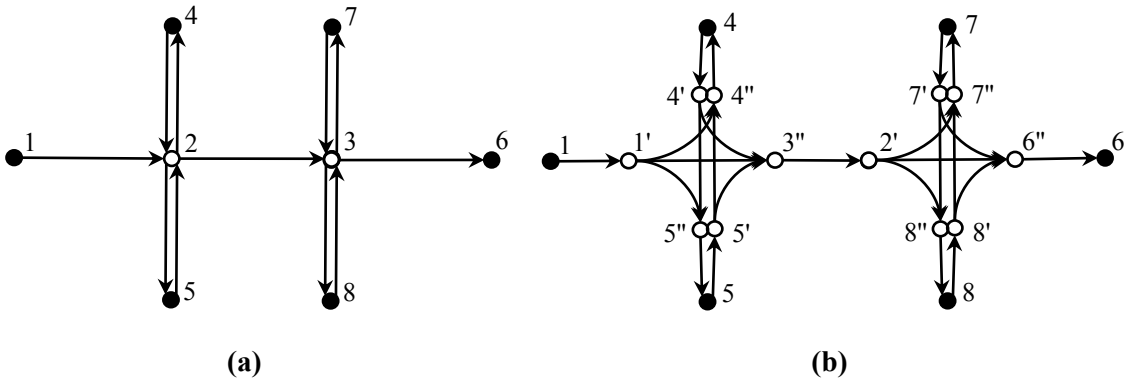
Si consideri la sequenza di intersezioni contigue rappresentata nella Fig. 4.3, e si supponga che ogni intersezione sia regolata in modo che esistano due fasi: la prima con verde alle correnti veicolari provenienti da archi orizzontali, la seconda con verde alle correnti veicolari provenienti da archi verticali. I veicoli che giungono all'intersezione 3 dopo aver attraversato l'intersezione 2 hanno uno sfasamento temporale che dipende dalla fase nella quale hanno attraversato l'intersezione 2: il flusso $f_{[1]}$ che proviene dal nodo 1 transita dall'intersezione 2 durante la prima fase, mentre il flusso $f_{[2]}$ che proviene dai nodi 4 e 5 transita dall'intersezione 2 durante la seconda fase. Per effettuare la coordinazione dei due semafori è importante conoscere entrambe le aliquote di flusso (a meno di non considerare trascurabile la seconda), le quali si possono ottenere utilizzando una rappresentazione esplosa della rete (vedi Fig. 4.3.b)

$$f_{[1]} = f_{(1', 3'')}$$

$$f_{[2]} = f_{(4', 3'')} + f_{(5'\text{-}3'')}$$

Se invece le intersezioni sono regolate in modo che esistano fasi riservate per le svolte a sinistra (o più in generale quando esiste più di una fase di verde per qualche accesso), allora servono informazioni più complete. Senza considerare tutte le possibili combinazioni di manovre alle due intersezioni, si consideri a titolo di esempio ed in maniera qualitativa la rilevanza che ha la conoscenza del flusso che dal nodo 5 si dirige verso il nodo 7. Se tale flusso è notevole, allora è opportuno coordinare la fase che consente la svolta a sinistra sull'arco (2', 7'') con la fase in cui viene dato il verde al flusso proveniente dal nodo 5 ed eventualmente predisporre adeguate corsie di accumulo. Se invece tale flusso è trascurabile, allora è preferibile dare priorità alla coordinazione di altre coppie di fasi interessate da un flusso veicolare più elevato. Dal vettore dei flussi assegnati non è possibile conoscere il flusso diretto dal nodo 5 verso il nodo 7. Considerando invece la matrice dei flussi congiunti, tale quantità è data dal termine $f_{(5', 3'')\rightarrow(2', 7'')}$, con riferimento alla Fig. 4.3.b. Anche utilizzando una rappresentazione non esplosa dei nodi della rete

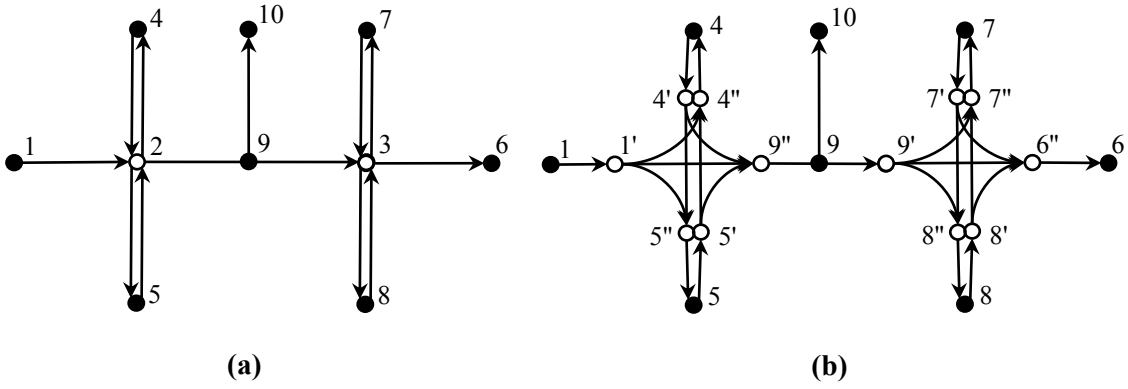
(vedi Fig. 4.3.a) tale quantità è data dal termine $f_{(5,\,2)\rightarrow(3,\,7)}$ (in realtà, come sarà chiarito in seguito, tale termine costituisce una buona approssimazione).




**(a)** **(b)**

**Fig. 4.3 – Rappresentazione semplice (a) ed esplosa (b) di due intersezioni contigue**[4]

Nel caso in cui le intersezioni non sono contigue, ma comunque vicine fra loro, il vettore dei flussi di arco non ci fornisce informazioni sufficienti per progettare la coordinazione delle fasi, neanche nel caso di una sola fase di verde per ogni accesso. Per comprendere meglio il senso di quanto detto, si consideri la porzione di rete rappresentata in Fig. 4.4, in cui rispetto alla rete riportata nella Fig. 4.3 è stato aggiunto il ramo (9, 10), e si osservi che una aliquota del flusso che attraversa l'intersezione 2 non giunge all'intersezione 3. In tal caso si rende indispensabile il ricorso alla matrice dei flussi congiunti, esattamente allo stesso modo in cui è stata utilizzata nell'esempio precedente.




**(a)** **(b)**

**Fig. 4.4 – Rappresentazione semplice (a) ed esplosa (b) di due intersezioni ravvicinate**

Considerando un generico termine della matrice dei flussi congiunti, ad esempio $f_{(1,\,2)\rightarrow(3,\,6)}$ con riferimento al grafo in Fig. 4.3.a, si ha che esso ci dice il flusso che

[4] La simbologia utilizzata nella rappresentazione dei grafi per questa e per le successive figure è la seguente: i nodi non semaforizzati sono rappresentati con un cerchio pieno, quelli semaforizzati con un cerchio vuoto; nelle rappresentazioni esplose delle intersezioni i nodi in ingresso all'intersezione sono indicati con un apice, quelli in uscita con due apici.

attraversa l'arco (1, 2) e successivamente l'arco (3, 6), ma non ci garantisce anche il passaggio dagli archi (2, 9) e (9, 3): il percorso seguito potrebbe essere 1 – 2 – 4 - .. .- 7 – 3 - 6 e pertanto si complica il calcolo del tempo necessario per andare dal nodo 2 al nodo 3[5]. Si possono verificare due casi:

- l'aliquota di flusso che effettua percorsi differenti dal percorso "diretto" (1 - 2 - 3 - 6) è trascurabile, ed in tal caso si può continuare ad utilizzare il termine $f_{(1,\,2)\rightarrow(3,\,6)}$ che rappresenta una buona approssimazione del flusso "diretto"[6];
- l'aliquota di flusso che effettua percorsi differenti dal percorso "diretto" non è trascurabile, ed in tal caso il termine $f_{(1,\,2)\rightarrow(3,\,6)}$ non è più una approssimazione valida del flusso "diretto".

Il verificarsi della seconda ipotesi è più probabile all'aumentare della distanza fra le intersezioni semaforizzate (poiché cresce il numero dei percorsi alternativi[7]), quando comunque i benefici della coordinazione sarebbero poco rilevanti. Pertanto verosimilmente si può ritenere di ricadere quasi sempre nel primo caso.

Si osservi che nel caso di intersezioni contigue utilizzando una rappresentazione esplosa è possibile effettuare un calcolo esatto utilizzando il termine $f_{(1',\,3'')\rightarrow(2',\,6'')}$ (vedi Fig. 4.3.b).

[5] Sarebbe possibile comunque calcolare un tempo medio, minimo e massimo su tutti i percorsi efficienti 1 - 2 -...- 3 - 6.

[6] Si consideri inoltre che il modello di assegnazione sottostima il flusso sul percorso "diretto" nel caso di semafori coordinati, poiché gli effetti della coordinazione non sono simulati.

[7] Si consideri che comunque il modello di scelta del percorso utilizzato è caratterizzato da un insieme di scelta limitato ai percorsi efficienti e dunque il numero di percorsi alternativi è generalmente abbastanza controllato.

## 4.2. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: topologia e regolazione semaforica

In questo paragrafo sono descritti i metodi proposti per la soluzione del modello di progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica con riferimento alla formulazione (3.2). La struttura generale di tutti i metodi risolutivi proposti che prevede un'articolazione in due fasi è descritta nel paragrafo 4.2.1.

La specificazione delle metaeuristiche utilizzate nella prima fase per l'ottimizzazione delle variabili intere associate alla topologia della rete è descritta nel paragrafo 4.2.2. Nella descrizione si assumono noti i principi generali che stanno alla base delle metaeuristiche utilizzate (Hill Climbing, Simulated Annealing, Tabu Search, Genetic Algorithms, Path Relinking). Per comodità del lettore è riportata in appendice una breve introduzione all'ottimizzazione combinatoria, contenente brevi descrizioni ed esaurienti riferimenti bibliografici alle metaeuristiche utilizzate.

Per il progetto delle regolazioni semaforiche, oltre al metodo descritto nel paragrafo 4.1, è possibile utilizzare l'algoritmo descritto nel paragrafo 4.2.3 che consente di impiegare un minore tempo di calcolo.

### 4.2.1. Struttura generale dell'algoritmo

La struttura generale dell'algoritmo proposto prevede che la generica i-esima soluzione $\mathbf{y}^{(i)}$ sia individuata in due fasi successive:

1. *Progetto della topologia*
   In funzione delle soluzioni generate precedentemente si genera una nuova configurazione della topologia della rete $\mathbf{y}_T^{(i)}$ utilizzando uno degli algoritmi proposti, basati su metaeuristiche.
2. *Progetto della regolazione semaforica*
   Fissata la configurazione della topologia $\mathbf{y}_T^{(i)}$ calcolata nella fase precedente si ottimizza la regolazione semaforica con un algoritmo euristico giungendo a determinare un vettore dei tempi di verde efficace $\mathbf{y}_C^{(i)}$.

La soluzione complessiva $\mathbf{y}^{(i)}$ si ottiene considerando insieme la parte intera $\mathbf{y}_T^{(i)}$ e continua $\mathbf{y}_C^{(i)}$, ottenute nelle due fasi precedentemente descritte. Un diagramma di flusso che illustra il funzionamento dell'algoritmo proposto è riportato nella Fig. 4.5.

All'avvio l'agoritmo necessita di un vettore iniziale delle variabili decisionali $\mathbf{y}_0$ (oppure in alcuni casi di un insieme di tali vettori). Questo vettore può essere generato casualmente, oppure può corrispondere ad una particolare configurazione della rete (ad esempio la configurazione attuale o una configurazione di progetto proposta).

La condizione di arresto prevede il calcolo di un numero fissato $i_{max}$ di soluzioni; più precisamente, il numero di configurazioni topologiche esplorate è fissato a priori[8]. Benché migliori condizioni di arresto potrebbero essere adottate in funzione dell'algoritmo

[8] Tale condizione di arresto non deve essere confusa con la condizione di arresto relativa all'algoritmo di progetto della regolazione semaforica.

utilizzato nella fase di progetto della topologia, l'utilizzo di questa condizione di arresto consente di comparare i vari metodi proposti a parità di tempo di calcolo[9], garantendo un equo confronto. L'unica eccezione è costituita dal criterio di arresto utilizzato quando la fase di progetto della topologia è effettuata con l'Hill Climbing (vedi paragrafi 4.2.2 e 4.2.2.7), che per sua natura si arresta quando viene individuato un ottimo locale.

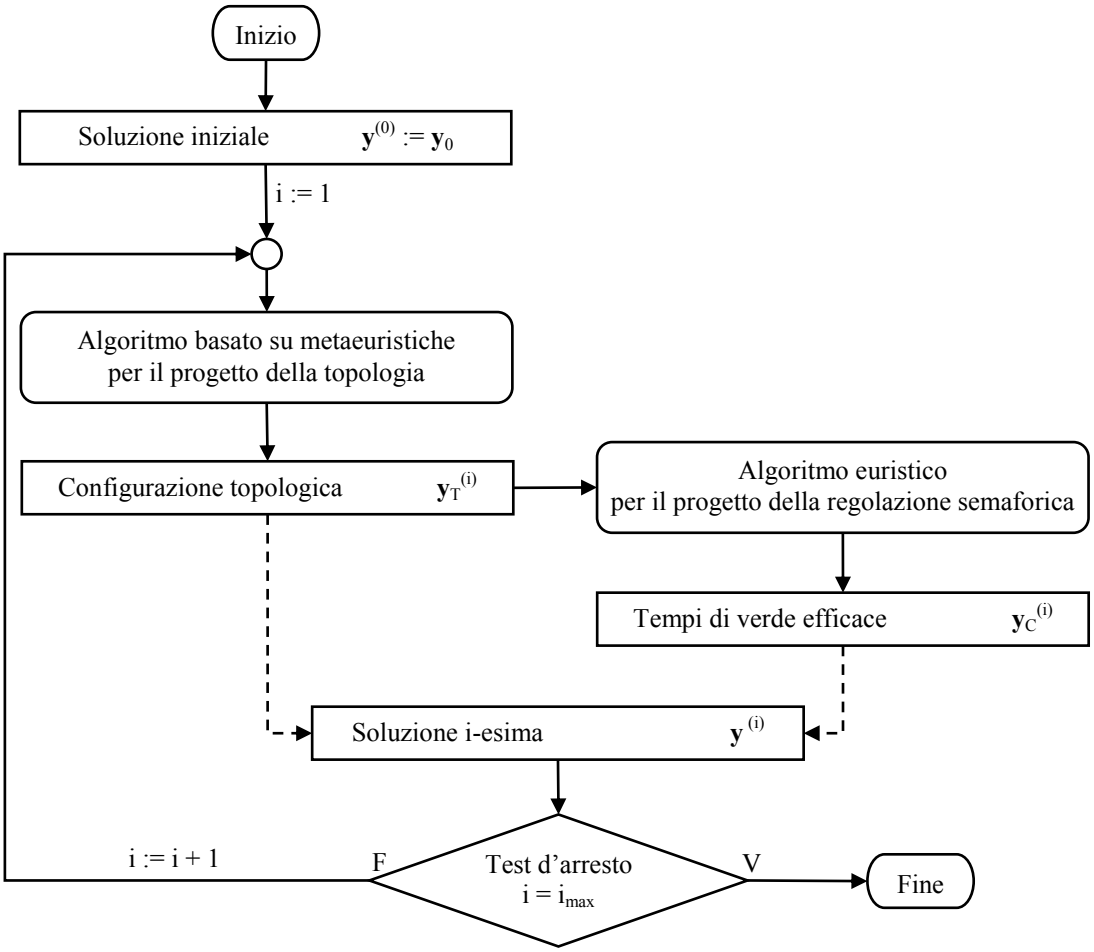



**Fig. 4.5 - Struttura generale dell'algoritmo di progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica**

## 4.2.2. Fase di progetto della topologia

Per la fase di progetto della topologia sono stati proposti molteplici metodi basati su metaeuristiche. Gli algoritmi proposti possono essere classificati in funzione di due fattori: il numero di metaeuristiche utilizzate per la specificazione dell'algoritmo stesso ed il tipo di intorno utilizzato.

[9] Il calcolo della funzione obiettivo è di gran lunga l'operazione computazionalmente più onerosa e quindi si può ragionevolmente assumere che a parità di soluzioni esplorate i tempi di calcolo sono uguali. Tale assunzione è confermata con buona approssimazione dalle sperimentazioni effettuate.

Per quanto riguarda il primo aspetto, cioè il numero di metaeuristiche utilizzate, si possono distinguere due casi:

- *metaeuristica semplice*, in cui l'algoritmo utilizzato è la specificazione di una singola metaeuristica;
- *metaeuristica ibrida*, in cui l'algoritmo utilizzato si basa sulla combinazione di più metaeuristiche opportunamente specificate.

Le metaeuristiche semplici proposte in questo studio sono: l'Hill Climbing, il Simulated Annealing, il Tabu Search ed i Genetic Algorithms. Sono state proposte anche due metaeuristiche ibride: la prima si basa sui Genetic Algorithms e sul Tabu Search, la seconda sul Tabu Search e sul Path Relinking.

Anche per quanto riguarda il secondo aspetto, cioè il tipo di intorno utilizzato, si possono distinguere due casi:

- *intorno singolo*, costituito da tutte le soluzioni che si possono ottenere dalla soluzione corrente variando il senso di marcia di al più una sequenza (cioè modificando al più un elemento del vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze $\mathbf{y}_T$);
- *intorno doppio*, costituito da tutte le soluzioni che si possono ottenere dalla soluzione corrente variando il senso di marcia di al più due sequenze (cioè modificando al più due elementi del vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze $\mathbf{y}_T$).

Tutte le metaeuristiche proposte sono state utilizzate adottando l'intorno singolo, mentre solo l'Hill Climbing è stato utilizzato anche con l'intorno doppio.

L'intorno singolo è costituito da un numero di elementi che cresce linearmente col numero di sequenze, secondo la seguente legge

$$|I_S(\mathbf{y}_T)| = 2|L_1| + 3|L_2| + 1 \tag{4.6}$$

dove $I_S(\bullet)$ è una funzione che restituisce l'intorno singolo di un dato vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze. Invece l'intorno doppio è costituito da un numero di elementi che cresce quadraticamente col numero di sequenze, secondo la seguente legge

$$|I_D(\mathbf{y}_T)| = 2|L_1|^2 + {}^9/_2|L_2|^2 + 6|L_1|\cdot|L_2| - {}^3/_2|L_2| + 1$$

dove $I_D(\bullet)$ è una funzione che restituisce l'intorno doppio di un dato vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze. Nella Fig. 4.6 è rappresentato il numero di elementi contenuti nei due tipi di intorno (in ordinata) al variare del numero di sequenze in progetto (in ascissa). Per ciascun tipo di intorno, ad un dato valore in ascissa corrispondono più valori in ordinata che dipendono dalla tipologia di sequenze considerate (con una corsia di marcia o con più corsie di marcia). Pertanto la relazione uno a molti esistente è rappresentata mediante un'area la cui frontiera superiore ed inferiore rappresentano le curve associate rispettivamente al caso in cui tutte le sequenze sono con più corsie di marcia e al caso in cui tutte le sequenze sono con una sola corsia di marcia. Per confronto si ricordi che il numero totale di possibili configurazioni topologiche cresce esponenzialmente col numero di sequenze (vedi Fig. 3.2).

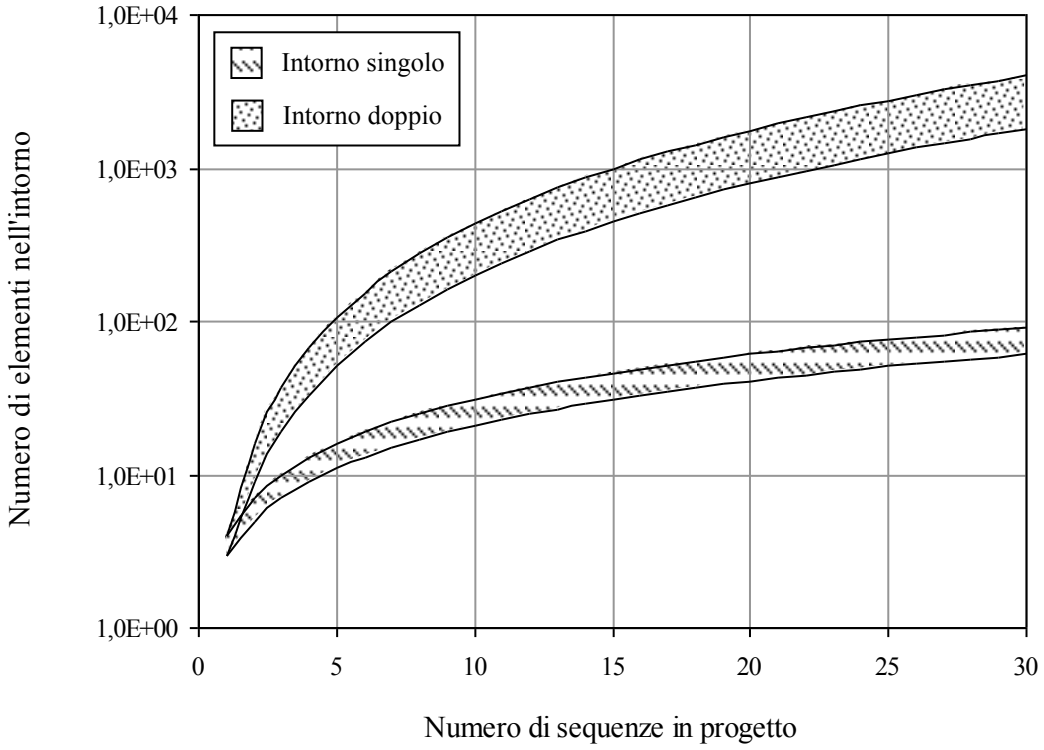



**Fig. 4.6 – Numero degli elementi contenuti negli intorni singolo e doppio**

Nella Fig. 4.6 si può osservare che per sistemi di trasporto nei quali sono individuate circa 30 sequenze di progetto il numero di elementi contenuti nell'intorno singolo è dell'ordine di grandezza di $10^2$, mentre l'intorno doppio è costituito da circa $10^2 \div 10^4$ configurazioni. Se ne deduce che il tempo necessario per esplorare l'intorno doppio e circa $10^2 \div 10^3$ volte superiore del tempo necessario per esplorare l'intorno singolo, e pertanto l'intorno doppio è molto penalizzante per quei tipi di metaeuristiche che si basano su notevole numero di esplorazioni dell'intorno (primo fra tutti il Tabu Search).

Un possibile sviluppo di questo studio è costituito dalla definizione di un tipo di intorno, detto *intorno intermedio*, che contenga un numero di soluzioni intermedio rispetto al numero di quelle contenute nell'intorno singolo e nell'intorno doppio. La ragione che ha spinto a considerare tale nuovo tipo di intorno è costituita dal fatto che il vantaggio qualitativo dell'intorno doppio deriva dalla possibilità di considerare l'effetto della contemporanea variazione di due sequenze, essendo tuttavia evidente che talvolta l'effetto complessivo delle variazioni è riconducibile alla sovrapposizione degli effetti delle singole variazioni. Questo accade quando le due sequenze considerate sono abbastanza "indipendenti" fra loro, ad esempio perché sono topologicamente distanti.

Una prima ipotesi di definizione dell'intorno intermedio si basa sulla suddivisione gerarchica e topologica della rete di trasporto. Grazie alla suddivisione gerarchica vengono individuate una rete primaria ed una rete secondaria, mente la suddivisione topologica consente di individuare più zone (ad esempio coincidenti con le zone di traffico). Secondo questa prima ipotesi l'intorno intermedio è costituito da tutte le soluzioni che si possono ottenere dalla soluzione corrente variando

- il senso di marcia di al più una sequenza;

- il senso di marcia di al più due sequenze, di cui almeno una appartenente alla rete primaria;
- il senso di marcia di al più due sequenze appartenenti alla rete secondaria e localizzate nella stessa zona o in zone adiacenti.

La struttura dell'intorno potrebbe variare dinamicamente durante le iterazioni a seconda che gli effetti osservati in funzione della variazione di una coppia di sequenze siano o non siano interpretabili come la sovrapposizione degli effetti delle singole variazioni.

La classificazione degli algoritmi proposti secondo i due fattori considerati è sinteticamente riporatata nella Fig. 4.7. Le specificazioni delle metaeuristiche semplici con intorno singolo sono trattate nei paragrafi 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3 e 4.2.2.4. Le specificazioni delle metaeuristiche ibride con intorno singolo sono trattate nei paragrafi 4.2.2.5 e 4.2.2.6. La descrizione dell'unica metaeuristica con intorno doppio è contenuta nel paragrafo 4.2.2.7.

| | | Metaeuristica | |
|---|---|---|---|
| | | Semplice | Ibrida |
| Intorno | Singolo | Hill Climbing (HC)<br>Simulated Annealing (SA)<br>Tabu Search (TS)<br>Genetic Algorithms (GA) | Genetic Algorithms + Tabu Search (GA+TS)<br>Tabu Search + Path Relinking (TS+PR) |
| | Doppio | Hill Climbing (HC2) | |

**Fig. 4.7 – Classificazione degli algoritmi utilizzati nella fase di progetto della topologia**

### 4.2.2.1. Hill Climbing (HC)

L'Hill Climbing è il più semplice dei metodi proposti per il progetto della topologia della rete. Il metodo è completamente deterministico e consente di individuare un minimo locale.

In questo metodo ad ogni iterazione viene selezionata la migliore (in termini di funzione obiettivo) soluzione appartenente all'intorno singolo della soluzione corrente. L'algoritmo si arresta quando non è più possibile migliorare il valore della soluzione corrente, cioè quando è stato raggiunto un minimo locale.

L'Hill Climbing è l'unico fra i metodi proposti che non è controllato da alcun parametro.

Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella Fig. 4.8.

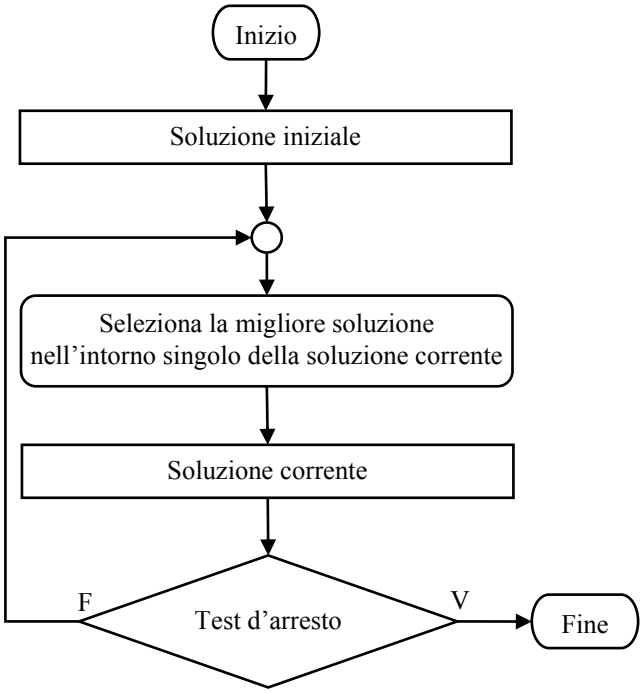



**Fig. 4.8 – Diagramma di flusso dell'Hill Climbing (HC)**

### 4.2.2.2. Simulated Annealing (SA)

Il Simulated Annealing è un metodo stocastico, che a differenza dell'Hill Climbing non esplora l'intero intorno della soluzione corrente. Esso non garantisce che la successiva soluzione individuata sia migliore della precedente (così come accade per tutti gli algoritmi di seguito trattati), consentendo soprattutto nelle fasi iniziali di spostarsi verso soluzioni che peggiorano la funzione obiettivo.

In questo metodo ad ogni iterazione viene selezionata casualmente (qui e nel seguito "casualmente" sarà inteso equivalente all'espressione: "con probabilità uniformemente distribuita") una soluzione appartenente all'intorno della soluzione corrente, e se tale soluzione soddisfa il *criterio di Metropolis* diviene la nuova soluzione corrente. La *temperatura* (parametro che regola la selettività del criterio di Metropolis) viene raffreddata secondo una progressione geometrica dopo un fase (*plateau*) nella quale viene eseguito un numero prefissato di iterazioni. Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella seguente figura.

Il Simulated Annealing è controllato da tre parametri:

- la temperatura iniziale, $\tau_0$, cioè il valore con cui è inizializzata la temperatura;
- la temperatura finale, $\tau_f$, cioè il valore di temperatura alla quale l'algoritmo si arresta;
- la lunghezza del plateau, $\lambda_p$, cioè il numero di soluzioni esplorate a temperatura costante, che è stato fissato a priori ($\lambda_p = 100$)[10].

[10] Ciò non comporta alcuna significativa perdita di generalità, poiché la lunghezza del plateau ed il tasso di raffreddamento (vedi immediatamente dopo nel testo) possono essere entrambi utilizzati in modo da regolare

Un ulteriore parametro che entra in gioco nell'algoritmo è il tasso di raffreddamento, $\alpha_c$, cioè la ragione della serie geometrica utilizzata per raffreddare la temperatura. Tuttavia, poiché la condizione di arresto dell'algoritmo prevede l'esplorazione di un numero prefissato di configurazioni topologiche, vi è in effetti un grado di libertà in meno che consente di calcolare il tasso di raffreddamento in funzione delle temperature iniziale e finale.

Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella Fig. 4.9.

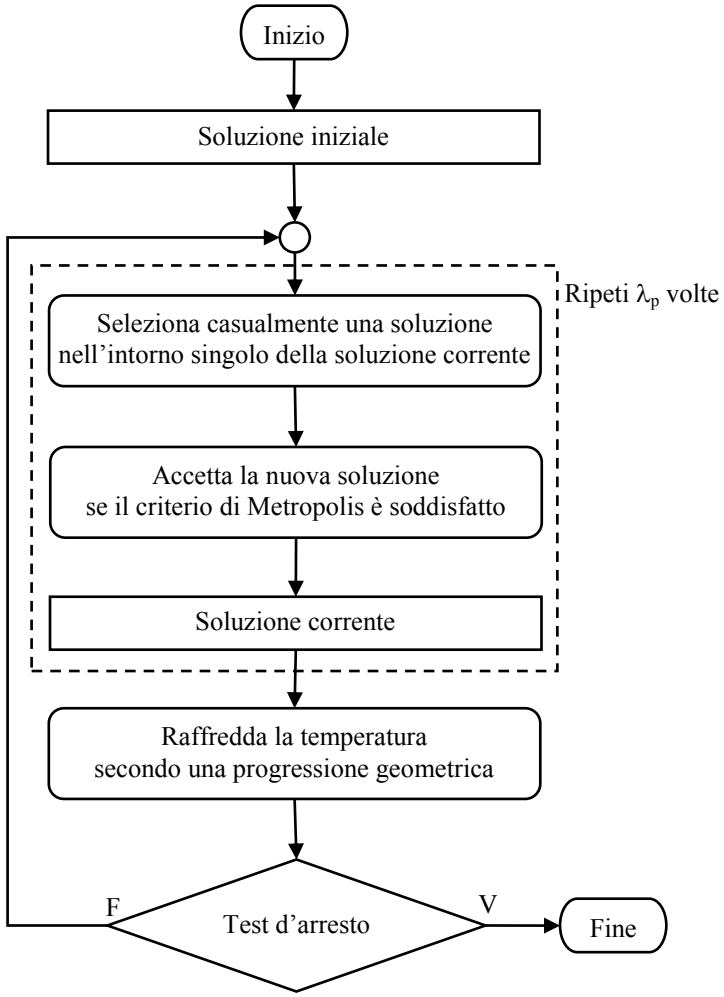



**Fig. 4.9 – Diagramma di flusso del Simulated Annealing (SA)**

### 4.2.2.3. Tabu Search (TS)

Il Tabu Search è un metodo che si basa sul mantenimento in memoria delle ultime mosse effettuate al fine di evitare di ritornare ad esplorare regioni dello spazio di ricerca già esplorate in precedenza.

l'andamento della temperatura. Cioè è possibile ridurre (aumentare) la velocità di raffreddamento della temperatura in modo quasi equivalente sia aumentando (riducendo) la lunghezza del plateau, sia aumentando (riducendo) il tasso di raffreddamento.

In questo metodo ad ogni iterazione viene selezionata la migliore soluzione appartenente all'intorno della soluzione corrente che non abbia una qualche sequenza la cui configurazione è contenuta nella *tabu list*. La tabu list contiene, per tutte le sequenze che sono state recentemente variate, la configurazione che esse avevano precedentemente a tale variazione; cioè, in altri termini, se una data sequenza era caratterizzata da una certa configurazione e questa è stata variata, allora viene vietata qualsiasi mossa che ripristina tale configurazione. I divieti imposti dalla tabu list possono essere violati solo se la soluzione considerata soddisfa il *criterio di aspirazione*, che prevede come condizione che la soluzione considerata abbia un valore di funzione obiettivo migliore della soluzione ottima corrente (cioè della migliore soluzione trovata fino al momento). La specificazione utilizzata per il Tabu Search (in particolare il criterio di aspirazione) garantisce che questo algoritmo conduca ad individuare una soluzione sicuramente non peggiore di quella ottenibile con l'Hill Climbing[11].

Il Tabu Search è controllato da un unico parametro di controllo: la dimensione della tabu list, indicata col simbolo $\lambda_l$, che rappresenta il numero di iterazioni durante le quali una data configurazione permane nella lista ed è pertanto considerata vietata. È stata in alcuni casi applicata una variante stocastica dell'algoritmo, in cui la dimensione della tabu list varia nel corso delle iterazioni da un valore minimo $\lambda_{l,min}$ ad un valore massimo $\lambda_{l,max}$. In tale variante stocastica, partendo da un valore casualmente scelto nell'intervallo considerato, ad ogni iterazione la dimensione della tabu list può crescere o decrescere di una unità in maniera equiprobabile[12].

Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella Fig. 4.10.

[11] L'evoluzione dell'Hill Climbing coincide con la prima fase dell'evoluzione del Tabu Search (se essi partono dalla stessa soluzione iniziale). Tuttavia quest'ultimo dopo aver individuato un ottimo locale (lo stesso che individua l'Hill Climbing) prosegue nell'esplorazione di ulteriori soluzioni.

[12] Quando la dimensione della tabu list assume i valori agli estremi dell'intervallo eventuali variazioni che comporterebbero la fuoriuscita dall'intervallo stesso non sono effettuate.

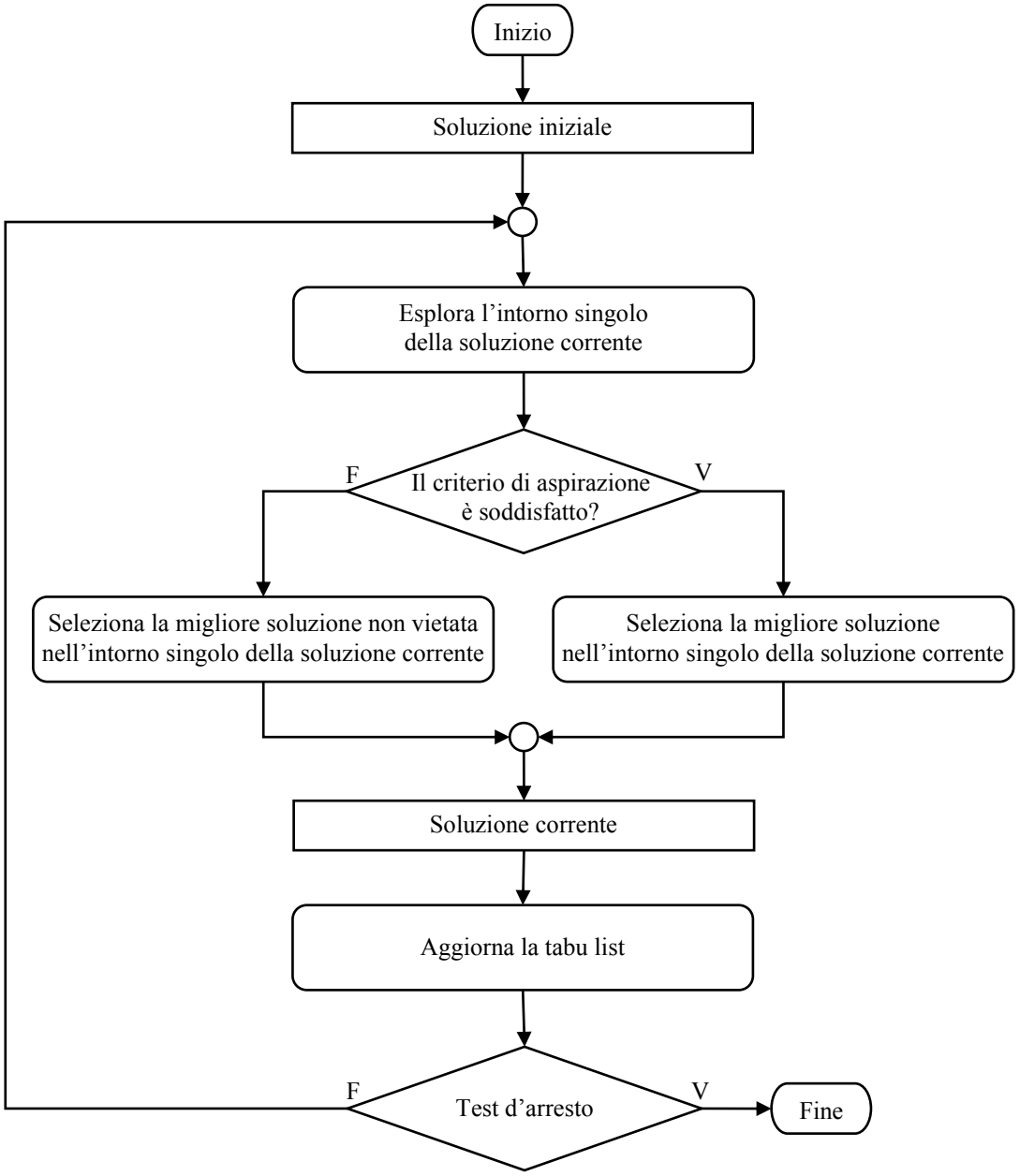



**Fig. 4.10 – Diagramma di flusso del Tabu Search (TS)**

### 4.2.2.4. Genetic Algorithms (GA)

I Genetic Algorithms, a differenza di tutte le metaeuristiche precedentemente descritte, ad ogni iterazione agiscono su un insieme (*popolazione*) di soluzioni che si evolve seguendo regole stocastiche.

In questo metodo ad ogni iterazione una popolazione di soluzioni viene sottoposta in sequenza ai seguenti operatori:

- la *riproduzione*, che viene effettuata rimpiazzando completamente la popolazione corrente con nuove soluzioni estratte casualmente con probabilità proporzionale al valore della *funzione di adattamento*, che è una trasformazione

esponenziale negativa del prodotto della funzione obiettivo normalizzata[13] per un parametro di selettività[14];

- il *crossover*, che per un numero prefissato di volte, date due soluzioni casualmente selezionate fra la popolazione corrente, le rimpiazza sostituendole con altrettante soluzioni ottenute scambiando due corrispondenti porzioni della stringa con la quale sono codificate (*cromosoma*)) comprese fra due punti di taglio selezionati casualmente;
- la *mutazione*, che per un numero prefissato di volte, data una soluzione casualmente selezionata fra la popolazione corrente, la sostituisce con un'altra soluzione casualmente scelta appartenente all'intorno singolo della soluzione data.

Sono state proposte e sperimentate altre specificazioni dei Genetic Algorithms differenti da quella sopra descritta. Le varianti adottate riguardano la riproduzione, che è stata effettuata utilizzando funzioni di adattamento basate sul ranking delle soluzioni: ranking lineare, ranking non lineare, troncamento, torneo.

I Genetic Algorithms sono controllati da quattro parametri:

- la cardinalità della popolazione, $\nu_p$, cioè il numero di soluzioni che costituiscono la popolazione;
- il parametro di selettività, $\alpha_r$, che interviene nella funzione di adattamento, regolandone la selettività (tale parametro assume valori non negativi e rende la riproduzione meno selettiva al suo decrescere);[15]
- la frequenza del crossover, $\varphi_c$, cioè il rapporto fra il numero di operazioni di ricombinazione di coppie di soluzioni e la cardinalità della popolazione;[16]
- la frequenza della mutazione, $\varphi_m$, cioè il rapporto fra il numero di soluzioni sottoposte a mutazione e la cardinalità della popolazione.

Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella Fig. 4.11.

[13] La normalizzazione avviene scalando linearmente nell'intervallo [0, 1] i valori della funzione obiettivo di tutte le soluzioni della popolazione corrente (il valore più alto della funzione obiettivo è trasformato in un valore unitario, mentre il valore più basso è trasformato in un valore nullo).

[14] La probabilità di riproduzione è in tal modo formalmente identica alla probabilità di scelta fornita da un modello Logit Multinomiale in cui le utilita sono gli opposti dei valori della funzione obiettivo associate alle soluzioni della popolazione corrente.

[15] Le varianti proposte, in cui sono utilizzate funzioni di adattamento basate sul ranking delle soluzioni, richiedeono anche esse l'utilizzo di un parametro di selettività opportunamente definito.

[16] Si osservi che la definizione qui data di "frequenza del crossover" è differente da quella usualmente utilizzata in letteratura, secondo cui essa è il rapporto fra il numero di soluzioni sottoposte a crossover e la cardinalità della popolazione.

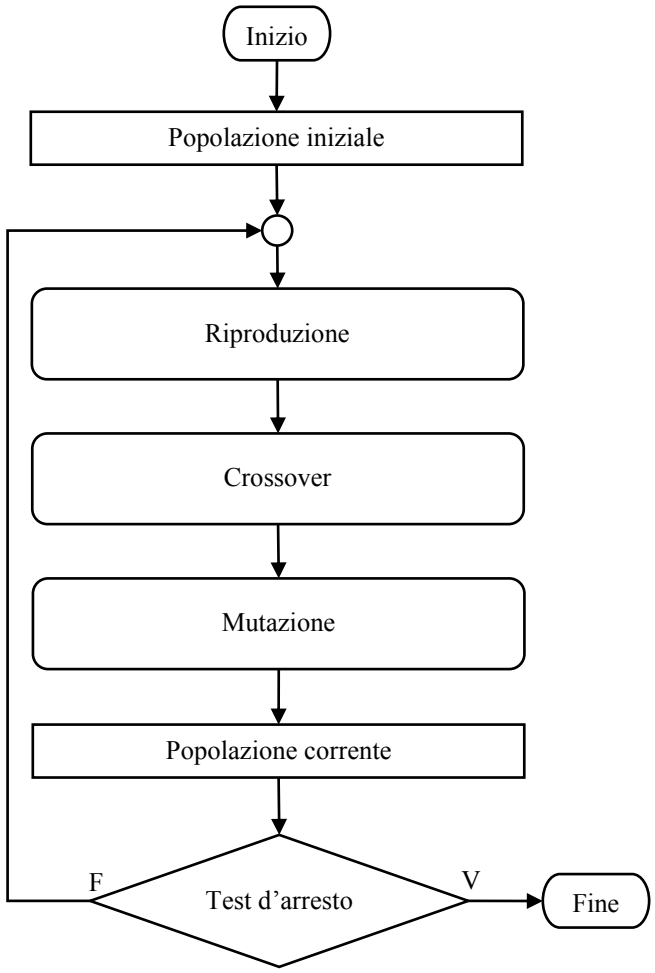



**Fig. 4.11 – Diagramma di flusso dei Genetic Algorithms (GA)**

### 4.2.2.5. Metodo ibrido 1: Tabu Search + Genetic Algorithms (TS+GA)

Questo metodo ibrido prevede l'applicazione del Tabu Search e dei Genetic Algorithms in due fasi separate, ciascuna delle quali parte dai migliori risultati ottenuti nella fase precedente.

Sono stati proposti due modi differenti con i quali questi algoritmi possono essere combinati:

- nel primo (TS→GA) è inizialmente applicato il Tabu Search a partire da una soluzione iniziale data, ed in una seconda fase sono applicati i Genetic Algorithms a partire da una popolazione iniziale costituita dalle migliori soluzioni ottenute col Tabu Search;
- nel secondo (GA→TS) sono inizialmente applicati i Genetic Algorithms a partire da una popolazione iniziale data, ed in una seconda fase è applicato il Tabu Search a partire da una soluzione iniziale costituita dalla migliore soluzione ottenuta con i Genetic Algorithms.

L'algoritmo, in qualsiasi dei due modi viene applicato, è controllato da sei parametri: oltre quelli che intervengono nel Tabu Search e nei Genetic Algorithms è infatti necessario

definire la frazione di soluzioni esplorate col Tabu Search, indicata col simbolo $\tau_{\%}$. Conseguentemente resta univocamente determinata la frazione di soluzioni esplorate con i Genetic Algorithms, 1 - $\tau_{\%}$.

I diagrammi di flusso delle due versioni proposte dell'algoritmo sono rappresentati nella Fig. 4.12.

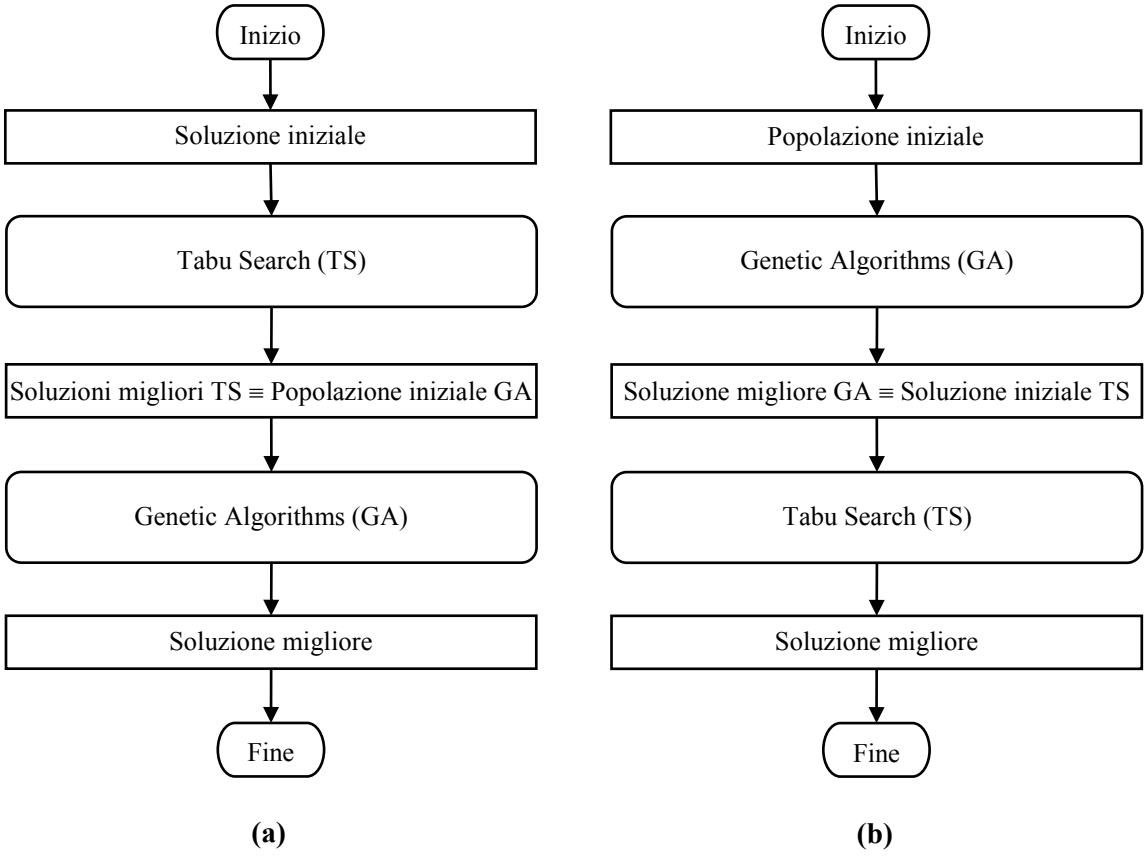



**Fig. 4.12 – Diagramma di flusso del metodo ibrido 1: TS→GA (a) e GA→TS (b)**

### 4.2.2.6. Metodo ibrido 2: Tabu Search + Path Relinking (TS+PR)

Questo metodo ibrido prevede come strategia di intensificazione per il Tabu Search l'esecuzione del Path Relinking.

Nel dettaglio, ogniqualvolta la soluzione corrente del Tabu Search è un minimo locale, interviene la fase di Path Relinking. La migliore soluzione individuata durante la fase di Path Relinking viene confrontata con la migliore soluzione ottenuta in precedenza e se essa ha un valore di funzione obiettivo migliore diviene la soluzione corrente del Tabu Search e la tabu list viene modificata opportunamente, altrimenti il Tabu Search riparte dal minimo locale precedentemente individuato.[17]

[17] La verifica che la soluzione corrente sia un minimo locale necessita l'esplorazione dell'intorno di tale soluzione. Questa verifica non comporta un ulteriore onere computazionale nel caso in cui essa non sia soddisfatta o comunque nel caso in cui, nonostante sia soddisfatta, la soluzione individuata nella fase di Path Relinking non è la migliore individuata fino al momento. Infatti in tal caso il Tabu Search prosegue dal

Nella fase di Path Relinking il minimo locale viene combinato con ciascuno dei minimi locali ottenuti in precedenza, ottenendo così ogni volta una coppia di soluzioni che vengono utilizzate come genitori per il Path Relinking. Quest'algoritmo viene eseguito in modo bidirezionale, cioè in due fasi distinte nelle quali i due genitori si alternano nel ruolo di soluzione iniziale e finale. Ad ogni passo viene scelta la migliore fra le soluzioni che sono contenute nell'intorno della soluzione corrente e che consentono una riduzione della distanza dalla soluzione finale (la distanza fra due soluzioni è misurata come il minimo numero di mosse necessarie per passare dall'una all'altra). Poiché ogni minimo locale viene combinato con tutti i precedenti, complessivamente tutti i minimi locali vengono combinati fra loro.[18]

La eventuale modifica della tabu list consiste nel sostituire la precedente lista con l'elenco delle configurazioni delle sequenze dei genitori utilizzati nella fase di Path Relinking che sono diverse dalle configurazioni della soluzione ottima corrente (ciò al fine di evitare di ritornare dalla soluzione ottima corrente verso uno dei due genitori). Tali elementi permangono nella tabu list per un numero prefissato di iterazioni, durante le quali la tabu list viene aggiornata come di consueto[19].

L'algoritmo è controllato da due parametri: oltre alla dimensione della tabu list, che interviene nella fase di Tabu Search, è infatti necessario definire il numero di iterazioni durante le quali permangono nella tabu list le configurazioni inserite durante la sua modifica (subito dopo l'esecuzione della fase di Path Relinking), indicato col simbolo $\lambda_{l'}$. La fase di Path Relinking, per come è stata specificata, non è regolata da alcun parametro.

Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella Fig. 4.13.

minimo locale precedentemente individuato e dunque l'esplorazione dell'intorno già effettuata è utilizzata nella successiva iterazione.

[18] L'effettuazione del Path Relinking utilizzando come coppie di genitori tutte le possibili combinazioni di minimi locali comporta che le stesse soluzioni sono esplorate ripetutamente (soprattutto quando le configurazioni di questi minimi locali sono molto simili fra loro). Pertanto durante la fase di Path Relinking è utilizzata una lista delle soluzioni già esplorate al fine di evitare il calcolo ripetuto della funzione obiettivo. Le soluzioni visitate per la seconda volta, il cui valore obiettivo non viene calcolato, non sono conteggiate al fine di valutare la condizione di arresto.

[19] Procedendo in tal modo è possibile che la tabu list contenga un numero di configurazioni vietate superiore alla sua dimensione. Pertanto è opportuno interpretare la dimensione della tabu list nel modo nel quale è stata definita, cioè essa rappresenta il numero di iterazioni durante le quali una data configurazione permane nella lista.

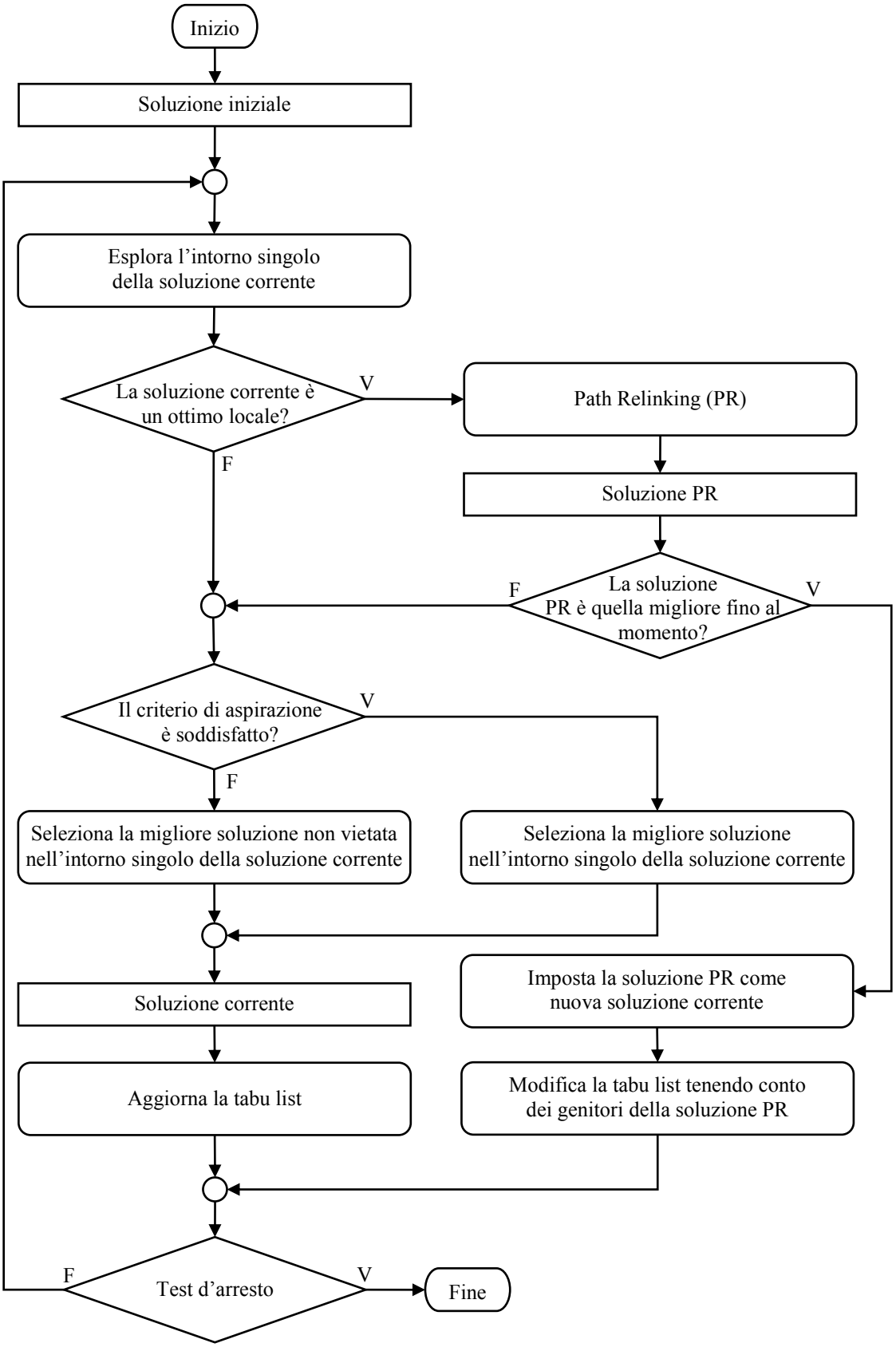



**Fig. 4.13 – Diagramma di flusso del metodo ibrido 2 (TS+PR)**

#### 4.2.2.7. Hill Climbing con intorno doppio (HC2)

L'Hill Climbing con intorno doppio si differenzia dall'algoritmo descritto nel paragrafo 4.2.2.7 solo per il diverso tipo di intorno considerato. Un diagramma di flusso dell'algoritmo è rappresentato nella Fig. 4.14.

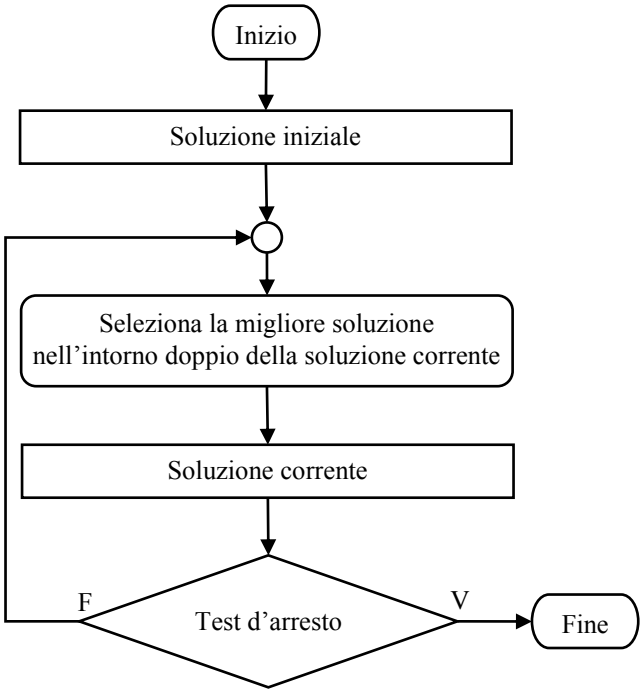



**Fig. 4.14 – Diagramma di flusso dell'Hill Climbing con intorno doppio (HC2)**

## 4.2.3. Fase di progetto della regolazione semaforica

Il problema che interviene nella fase di progetto della regolazione semaforica, essendo la topologia fissata, si riduce al problema formulato nel paragrafo 3.1, e pertanto può essere affrontato con un qualsiasi algoritmo in grado di risolverlo, indipendentemente dagli algoritmi utilizzati nella fase di progetto della topologia.

Dal momento che il metodo proposto nel paragrafo 4.1 è ancora in fase di sviluppo, ci si è serviti di un altro algoritmo già proposto in letteratura [24] nello stesso contesto di utilizzo. Tale algoritmo è caratterizzato da un tempo di calcolo notevolmente ridotto e pertanto si adatta bene ad essere richiamato ripetutamente all'interno della procedura complessiva di ottimizzazione. Tuttavia va tenuto presente che si tratta di un metodo euristico del quale non è possibile neanche dimostrare la convergenza verso una qualsiasi soluzione.

L'algoritmo utilizzato è equivalente ad una assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti con funzioni di costo non separabili. L'algoritmo risolutivo procede iterativamente in due fasi:

- nella prima fase viene effettuata un'assegnazione deterministica di carico della rete, ricavando i flussi sulla rete in funzione di costi di arco dati; i flussi ottenuti vengono mediati con quelli precedenti secondo quanto previsto dall'Algoritmo delle Medie Successive;
- nella seconda fase vengono separatamente ottimizzati i tempi di verde di ciascuna intersezione col metodo di Webster [112, 113] utilizzando i flussi calcolati nella prima fase; inoltre i costi vengono aggiornati in funzione delle regolazioni semaforiche correnti per mezzo delle funzioni di costo.

# CAPITOLO 5
# Sperimentazioni

In questo capitolo sono descritte le sperimentazioni effettuate su sistemi di trasporto test e su sistemi reali al fine di valutare l'efficienza e l'efficacia dei metodi risolutivi proposti. I risultati ottenuti consentono il confronto di alcuni dei metodi proposti fra loro e con gli approcci correntemente utilizzati nella pratica professionale.

L'algoritmo proposto per il progetto della regolazione semaforica è stato sperimentato su reti test con poche variabili decisionali, cioè con poche intersezioni semaforizzate in progetto. L'esiguo numero di variabili decisionali ha consentito di individuare la soluzione ottima globale del problema e valutare se e quanto l'euristica proposta si avvicina a tale soluzione. I primi risultati sono positivi: l'algoritmo spesso converge verso una soluzione che è vicina all'ottimo globale. La convergenza verso punti lontani dall'ottimo è stata osservata solo quando i punti di partenza sono caratterizzati da tempi di verde efficace molto piccoli rispetto al tempo di ciclo.

Gli algoritmi per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica sono stati sperimentati su reti reali. Poiché molte delle metaeuristiche utilizzate nella fase in cui si agisce sulle variabili legate alla topologia sono controllate da uno o più parametri, sono state effettuate delle sperimentazioni su due sistemi di trasporto reali, relativi alle città di Barcellona Pozzo di Gotto (ME) e Villa San Giovanni (RC), utilizzando diversi valori di tali parametri al fine di ottenere una loro calibrazione. Successivamente gli algoritmi sono stati applicati su un terzo sistema relativo alla città di Melito Porto Salvo (comune di poco più di 10˙000 abitanti in provincia di Reggio Calabria) con i parametri calibrati in precedenza. I dati relativi ai sistemi di domanda e di offerta di questa città sono stati forniti dal C.I.Su.T.[1] Lo scopo di queste sperimentazioni è duplice: da una parte esse consentono di confrontare fra loro i vari algoritmi utilizzati nella fase di progetto della topologia e di valutare le caratteristiche delle soluzioni da essi fornite, dall'altra consentono un confronto con le configurazioni proposte da un Piano Urbano del Traffico redatto dal C.I.Su.T. nel rispetto delle migliori pratiche professionali correnti.

Gli algoritmi per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica sono stati applicati utilizzando nella fase di progetto della regolazione l'algoritmo descritto nel paragrafo 4.2.3. L'utilizzo di questo metodo è dovuto al fatto che l'algoritmo del gradiente proiettato proposto in questo studio (descritto nel paragrafo 4.1) è ancora in fase sperimentale ed inoltre necessita di un maggiore tempo di calcolo, anche se presumibilmente è in grado di condurre a risultati migliori. Questa scelta si giustifica tenendo anche conto che alcuni degli obiettivi delle sperimentazioni sono il confronto e la calibrazione dei parametri degli algoritmi utilizzati nella fase di progetto della topologia.

[1] Consorzio Istituto Superiore dei Trasporti, con sede a Reggio Calabria presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università Mediterranea.

Dunque essendo l'attenzione puntata su questa fase si è preferito ricorrere per la fase di progetto della regolazione semaforica ad un algoritmo ampiamente sperimentato (al fine di evitare distorsioni nei risultati, dovuti all'inaffidabiltà dell'algoritmo utilizzato) e meno oneroso computazionalmente (al fine di potere effettuare le molte prove necessarie per la calibrazione dei parametri in tempi ragionevoli).

Tutte le sperimentazioni sono state condotte grazie all'implementazione degli algoritmi proposti con codici di calcolo scritti nei linguaggi C e Visual Basic. Tutti gli algoritmi sono stati implementati nell'ambito di questo lavoro, ad eccezione dell'algoritmo per il progetto della regolazione semaforica descritto nel paragrafo 4.2.3, che è stato sviluppato nell'ambito di un altro studio [24]. La necessità di implementare gli algoritmi proposti deriva dal fatto che i software commerciali di simulazione dei sistemi di trasporto e di ottimizzazione non possono essere integrati fra loro in maniera sufficientemente flessibile per gli scopi di questo lavoro.[2]

I risultati delle sperimentazioni sul progetto della regolazione semaforica sono riportati nel paragrafo 5.1. I risultati relativi al progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica sono riportati nel paragrafo 5.2.

[2] In particolare non è possibile ricorrere a software commerciali che consentano l'esecuzione degli algoritmi di progetto della regolazione semaforica. Inoltre alcune delle metaeuristiche proposte in questo studio sono del tutto originali (ad esempio il metodo ibrido 2) e pertanto i pacchetti commerciali di ottimizzazione non sono in grado di eseguirle neanche in modo approssimato.

## 5.1. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: regolazione semaforica

L'algoritmo euristico proposto per il progetto della regolazione semaforica è stato sperimentato su sistemi di trasporto test con poche variabili decisionali, cioè con poche intersezioni in progetto. Lo scopo principale di queste sperimentazioni è quello di verificare i risultati che questo algoritmo è in grado di garantire.

L'algoritmo è stato sperimentato su alcune reti test di contenute dimensioni (il cui numero di archi è compreso fra 5 e 24, il numero di nodi fra 4 e 9, ed il numero di coppie origine-destinazione fra 1 e 12) in cui sono state considerate da 1 a 3 intersezioni in progetto. Per una generica intersezione in progetto associata sono sempre state considerate 2 fasi. I tempi di verde efficace della generica intersezione associata al nodo n, indicate con $y_{C,n}$ e $y_{C,n'}$, possono essere messe in relazione fra loro grazie al vincolo (3.1.d), esprimendo l'uno in funzione dell'altro

$$y_{C,n'} = t_n + t'_n - y_{C,n}$$

Pertanto il vincolo (3.1.d) può essere utilizzato per ridurre le variabili decisionali, considerandone solo una per intersezione in progetto.

I risultati delle sperimentazioni sono positivi: l'algoritmo spesso converge verso una soluzione che è vicina all'ottimo globale. La convergenza verso punti lontani dall'ottimo è stata osservata solo quando i punti di partenza sono caratterizzati da tempi di verde efficace molto piccoli. Tuttavia questo è un problema di scarsa rilevanza, in quanto l'utilizzo di tempi di verde efficace molto piccoli è una condizione da evitare e ciò è formalmente imposto nel modello dal vincolo (3.1.c).

Fra i vari risulati ottenuti qui sono riportati a titolo esemplificativo quelli ottenuti su un sistema di trasporto test (24 archi, 9 nodi 12 coppie origine-destinazione) con due intersezioni in progetto, e quindi due variabili decisionali (vedi Fig. 5.1). La presenza di due variabili di progetto consente di rappresentare le curve di livello della funzione obiettivo in un grafico, riportando sugli assi il rapporto fra il tempo di verde efficace ed il tempo di ciclo al netto dei perditempo ($t_n - t'_n$). Tale rappresentazione è riportata nella Fig. 5.1, dove sono anche individuate in modo schematico le traiettorie ottenute partendo da nove punti diversi, indicati con le lettere da A fino a H. Si possono distinguere due casi:

- le traiettorie che partono da punti caratterizzati da un tempo di verde molto piccolo (indicati con le lettere da F a I) sono tali da ridurre ulteriormente questo tempo peggiorando sempre il valore della funzione obiettivo;
- le traiettorie che partono da punti in cui nessun tempo di verde è molto piccolo (indicati con le lettere da A a E) convergono tutte in un punto prossimo all'ottimo globale migliorando sempre il valore della funzione obiettivo; queste traiettorie nella regione intorno al punto di ottimo (e al punto di convergenza)

dove le curve di livello sono più diradate[3] sono caratterizzate talvolta da alcuni tratti di salita, cioè tratti in cui la funzione obiettivo peggiora.

Alcune di queste traiettorie sono state ulteriormente analizzate rappresentando l'andamento della funzione obiettivo, o più precisamente del suo scarto percentuale rispetto al valore ottimo globale, indicato con $\Delta w^{+}$, e l'andamento delle variabili decisionali al variare delle iterazioni.

L'andamento della funzione obiettivo è stato rappresentato nelle Fig. 5.2, Fig. 5.4 e Fig. 5.6, rispettivamente per le traiettorie che partono dai punti C, D ed E. Si può osservare che l'eventuale parte in salita della traiettoria produce un peggioramento trascurabile della funzione obiettivo. Le traiettorie che partono dai punti A e B non sono state considerate in quanto nel punto di partenza lo scarto percentuale della funzione obiettivo rispetto al valore ottimo globale è molto contenuto (inferiore al 2%) e dunque la sua riduzione e meno significativa.

L'andamento delle variabili decisionali è stato rappresentato nelle Fig. 5.3, Fig. 5.5 e Fig. 5.7, rispettivamente per le traiettorie che partono dai punti C, D ed E. Si può osservare che le variazioni di tali vaiabili si mantengono abbastanza stabili durante le iterazioni. Ciò induce a pensare che sarebbe possibile raggiungere gli stessi risultati con un numero molto più piccolo di iterazioni se nell'algoritmo vi fosse una più adeguata tecnica di scelta del passo di spostamento lungo la direzione di discesa.

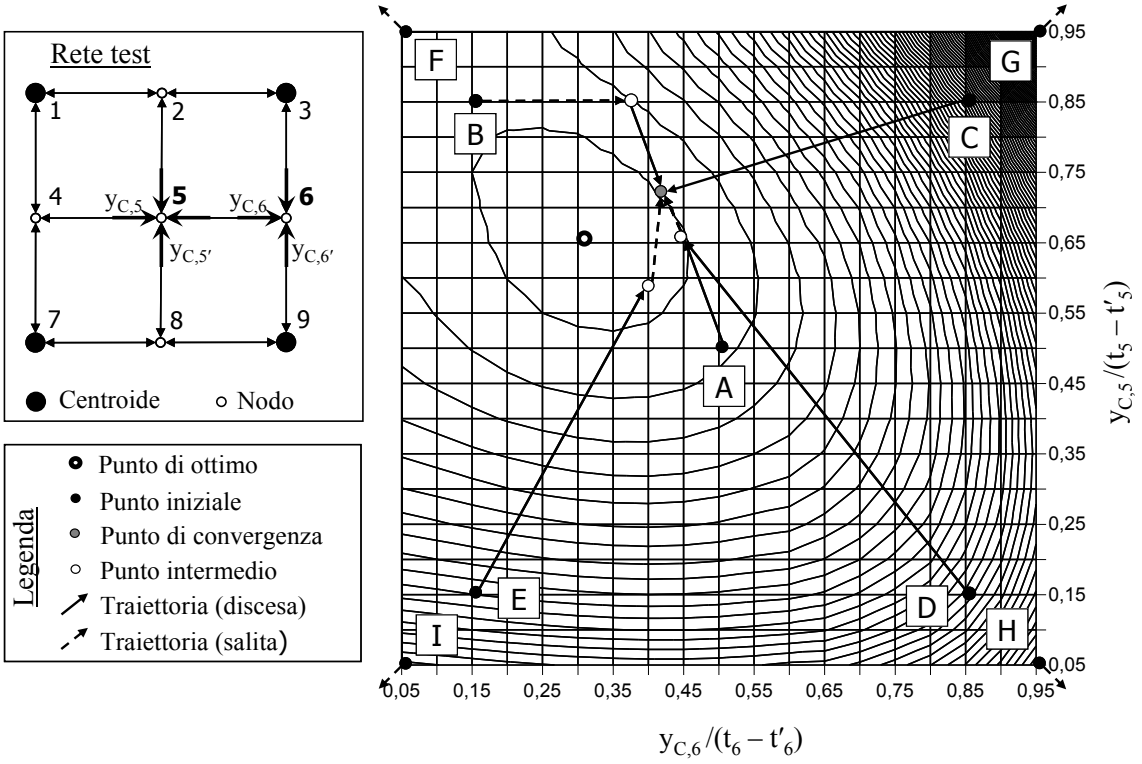



**Fig. 5.1 – Risultati dell'applicazione dell'algoritmo proposto ad una rete test**

[3] La diradazione delle curve di livello corrisponde a regioni in cui la funzione obiettivo varia più dolcemente, cioè in termini formali il modulo del gradiente è piccolo.

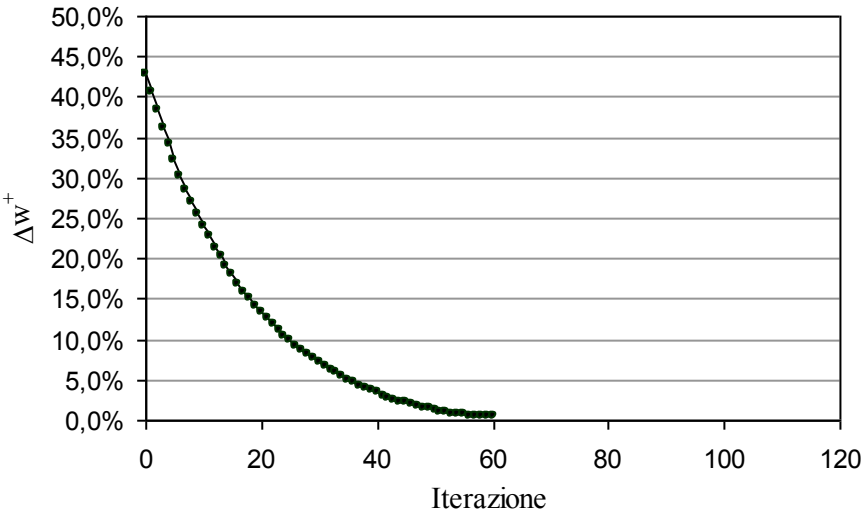



**Fig. 5.2 – Andamento della funzione obiettivo per la traiettoria che parte dal punto C**

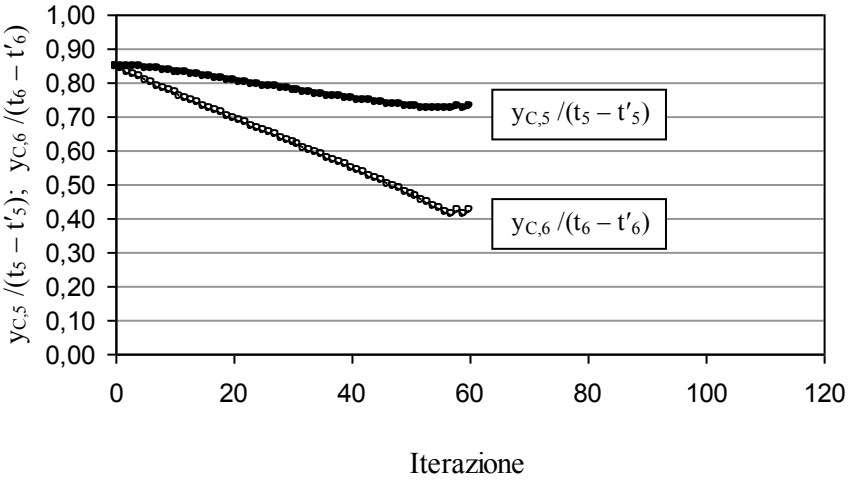



**Fig. 5.3 – Andamento delle variabili decisionali per la traiettoria che parte dal punto C**

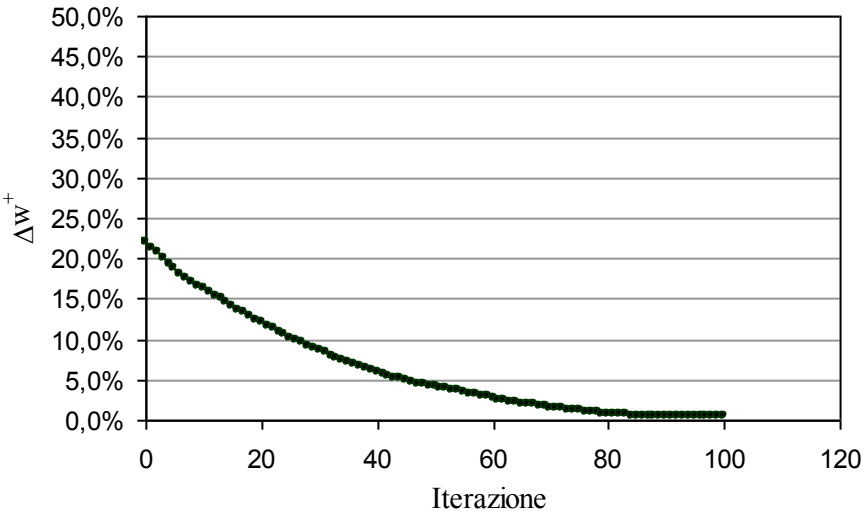



**Fig. 5.4 – Andamento della funzione obiettivo per la traiettoria che parte dal punto D**

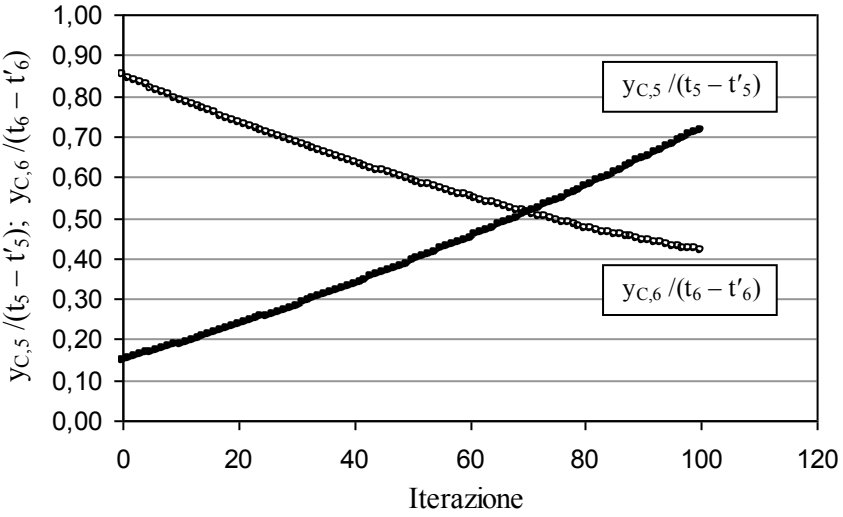



**Fig. 5.5 – Andamento delle variabili decisionali per la traiettoria che parte dal punto D**

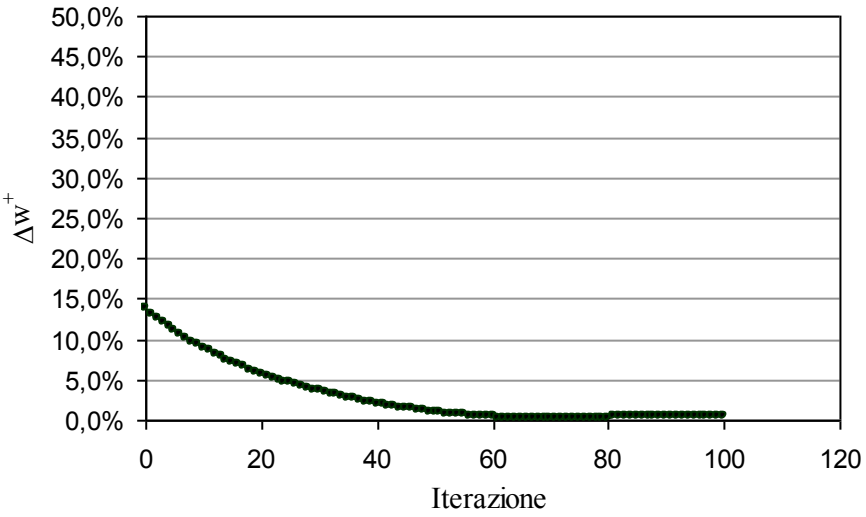



**Fig. 5.6 – Andamento della funzione obiettivo per la traiettoria che parte dal punto E**

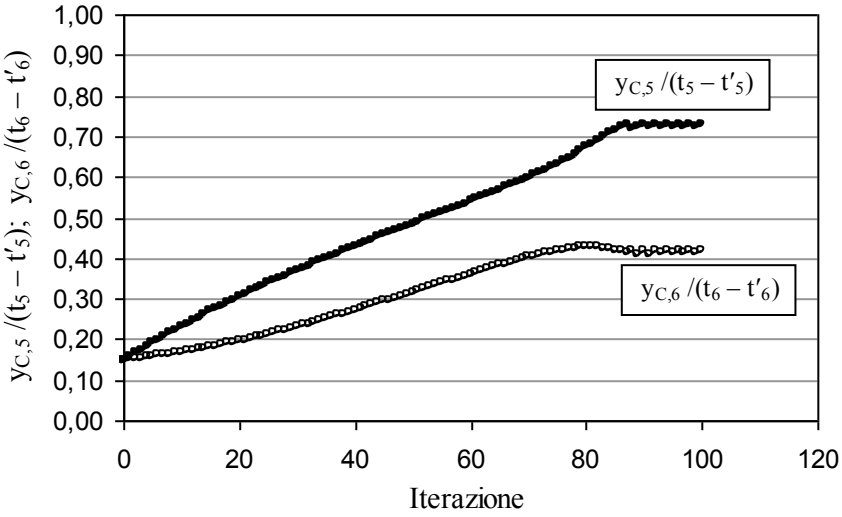



**Fig. 5.7 – Andamento delle variabili decisionali per la traiettoria che parte dal punto E**

L'algoritmo applicato con l'approccio analitico proposto per il calcolo della direzione di spostamento è stato confrontato con un algoritmo nel quale il calcolo della direzione di discesa è effettuato con un equivalente approccio numerico in cui il generico elemento del gradiente approssimato può essere calcolato utilizzando il metodo delle differenze finite. Si può dimostrare che l'approssimazione introdotta utilizzando il metodo proposto è equivalente ad applicare il metodo delle differenze finite considerando il valore della funzione obiettivo nel punto corrente calcolato in modo esatto, cioè con una assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti (SUE), mentre il valore della funzione obiettivo nei punti vicini è calcolato in modo approssimato con una assegnazione di carico stocastico della rete (SNL).

La complessità computazionale asintotica dell'approccio analitico per il calcolo del gradiente è $O(|RS|^2 |N|^2)$, mentre quella relativa all'approccio numerico è $O(|RS|^{1/2} |N|^2 \log |N| + |RS| |N|^2)$ se si assume che il numero di parametri di regolazione semaforica è proporzionale al numero dei nodi. Tuttavia, al di là di queste considerazioni teoriche, è stato sperimentalmente osservato che l'approccio numerico richiede di effettuare un calcolo molto più accurato del valore della funzione obiettivo nel punto corrente (cioè l'assegnazione di equilibrio stocastico deve essere spinta fino ad errori di convergenza molto piccoli), al fine di garantire un simile livello di accuratezza nel calcolo della direzione di spostamento. Ciò si traduce nel fatto che il tempo di calcolo nell'approccio numerico è spesso notevolmente superiore se si vuole mantenere un simile livello di precisione.

## 5.2. Progetto dell'offerta dei sistemi di trasporto: topologia e regolazione semaforica

Gli algoritmi proposti per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica sono stati sperimentati progettando le reti di trasporto di alcuni centri urbani di Comuni dell'Italia Meridionale (con popolazione compresa fra 10˙000 e 40˙000 abitanti).

Le sperimentazioni hanno avuto tre obiettivi:

- la calibrazione dei parametri di controllo che intervengono nelle metaeuristiche specificate per la fase di progetto della topologia;
- l'analisi ed il confronto delle caratteristiche delle soluzioni generate utilizzando le differenti metaeuristiche proposte;
- il confronto in termini di indicatori e di topologia delle configurazioni ottenute con i metodi "what to" proposti e con i metodi "what if" utilizzati nella pratica professionale.

Per ogni sistema di trasporto sono state considerate due matrici origine-destinazione: una è relativa all'ora di punta mattutina (stimata con un modello di domanda) e l'altra è relativa all'ora di punta pomeridiana (approssimata per mezzo della trasposta della precedente matrice). La funzione obiettivo tiene conto di due simulazioni effettuate utilizzando entrambe le matrici, cioè in altri termini la essa è data dalla somma dei tempi di viaggio nelle ore di punta mattutina e pomeridiana. Questo evita che le configurazioni di progetto siano squilibrate, favorendo ad esempio l'accesso verso le zone a maggiore concentrazione di attività a discapito dell'egresso se la sola matrice relativa all'ora di punta mattutina è utilizzata.[4]

Tutte le elaborazioni partono da una soluzione che rappresenta la configurazione dello stato di fatto (per i Genetic Algorithms le restanti soluzioni che costituiscono la popolazione iniziale sono generate casualmente) e, ad eccezione dell'Hill Climbing, si arrestano dopo aver esplorato un numero prefissato di configurazioni topologiche.

Nel riportare i risultati delle applicazioni è utilizzata la seguente simbologia:

- $w_0$ è il valore della funzione obiettivo calcolata utilizzando la configurazione topologica iniziale, cioè quella relativa allo stato di fatto, con la regolazione ottimizzata;[5]
- $w^*$ è il miglior valore della funzione obiettivo ottenuto durante l'esecuzione di un'elaborazione;
- $\Delta w^{\%}$ è il decremento percentuale della funzione obiettivo ottenuto in una elaborazione, cioè

[4] Il progetto può anche essere effettuato tenendo conto di due configurazioni differenti della regolazione semaforica per l'ora di punta mattutina e pomeridiana (e più in generale per qualsiasi fascia oraria di punta o di morbida). È infatti possibile variare lungo l'arco della giornata la durata delle fasi semaforiche.

[5] La scelta di calcolare il valore iniziale con i parametri di regolazione già ottimizzati deriva dal fatto che l'attenzione è posta sulle performance garantite dagli algoritmi per il progetto della topologia, e dunque i miglioramenti della funzione obiettivo ottenuti durante l'elaborazione sono in tal modo imputabili esclusivamente alla variazione della topologia (considerando ovviamente che comunque anche la regolazione semaforica ottima si modifica al variare della topologia).

$$\Delta w^{\%} = \frac{w_0 - w^*}{w_0}$$

Nel paragrafo 5.2.1 sono riportati i risultati delle elaborazioni effettuate per calibrare i parametri delle metaeuristiche. Nel paragrafo 5.2.1 sono analizzate e confrontate le caratteristiche delle soluzioni generate utilizzando le metaeuristiche proposte con i parametri calibrati in precedenza. Nel paragrafo 5.2.3 sono messe a confronto da una parte le soluzioni ottenute con gli algoritmi presentati in questo studio e dall'altra le soluzioni proposte con i metodi "what if" utilizzati nella pratica professionale per la redazione di un Piano Urbano del Traffico.

## 5.2.1. Calibrazione dei parametri

In questo paragrafo sono descritte e analizzate le sperimentazioni effettuate al fine di calibrare i parametri che regolano le metaeuristiche utilizzate nella fase di progetto della topologia. Le sperimentazioni effettuate consentono anche di effettuare alcuni confronti preliminari fra le performances dei differenti algoritmi.

I sistemi di trasporto utilizzati sono descritti nel 5.2.1.1. I risultati delle elaborazioni sono riportati e analizzati nel paragrafo 5.2.1.2.

### 5.2.1.1. Sistemi di trasporto utilizzati

Per effettuare le calibrazioni sono stati impiegati due sistemi di trasporto, entrambi relativi a città dell'Italia Meridionale: Villa San Giovanni (RC) e Barcellona Pozzo di Gotto (ME). Nel primo caso l'area di studio e l'area di progetto coincidono con l'intera area urbana (vedi Fig. 5.8). Nel secondo caso l'area di studio coincide ancora con l'intera area urbana, ma l'area di progetto corrisponde al centro storico, che è approssimativamente equivalente al 17% degli archi della rete dell'intera area urbana (vedi Fig. 5.9). In entrambi i casi ci sono 34 sequenze in progetto; le intersezioni in progetto sono quelle correlate con le sequenze (cioè vengono considerati i nodi per i quali almeno un arco della stella in ingresso o della stella in uscita appartiene ad una sequenza in progetto).

Le principali caratteristiche di questi due sistemi di trasporto sono riportate nella Tab. 5.1. Si può notare che il numero di spostamenti complessivi col modo auto è simile nei due casi, nonostante il numero di residenti nell'area di studio di Barcellona Pozzo di Gotto è più che doppio di quelli residenti nell'area di studio di Villa San Giovanni. Questo può essere spiegato sia col notevole numero di spostamenti di attraversamento che interessano la cittadina calabra (principale punto di accesso verso la Sicilia) sia col fatto che essa, a differenza di Barcellona Pozzo di Gotto, non è dotata di un sistema di trasporto colletivo urbano.

Per quanto riguarda il sistema di trasporto di Villa San Giovanni, il valore della funzione obiettivo relativa alla configurazione topologica della stato di fatto è

$$w_0 = 783{,}5 \text{ h}$$

mentre per quanto riguarda il sistema di trasporto di Barcellona Pozzo di Gotto, tale valore è

$$w_0 = 1.798{,}3 \text{ h}$$

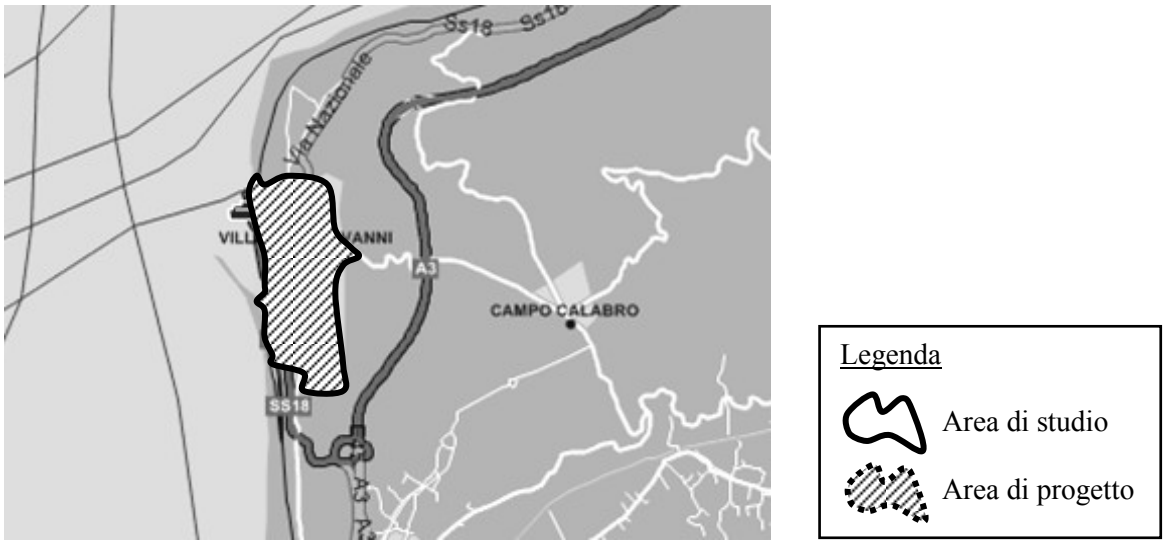



**Fig. 5.8 – Area di studio e area di progetto del sistema di trasporto di Villa San Giovanni**

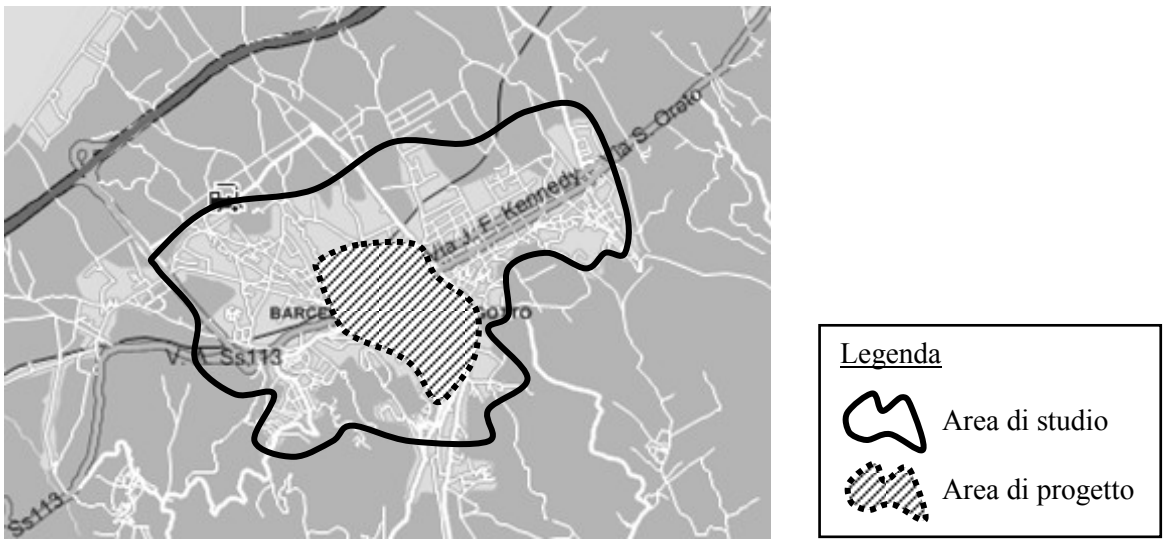



**Fig. 5.9 – Area di studio e area di progetto del sistema di trasporto di Barcellona P. di G.**

**Tab. 5.1 – Caratteristiche dei sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona P. di G.**

| | | Villa San Giovanni | Barcellona P. di G. |
|---|---|---|---|
| *Area di studio* | Abitanti | 12˙000 | 30˙000 |
| | Spostamenti modo auto (ora di punta) | 4˙640 veic/h | 5˙247 veic/h |
| | Coppie origine-destinazione | 380 | 650 |
| | Nodi | 88 | 176 |
| | Archi | 225 | 510 |
| | Lunghezza della rete | 45 km | 81 km |
| *Area di progetto* | Sequenze | 34 | 34 |
| | Intersezioni | 40 | 58 |

### 5.2.1.2. Risultati delle calibrazioni

Sono di seguito descritti per ogni algoritmo testato i risultati delle elaborazioni effettuate con differenti parametri. Per completezza sono riportati anche i risultati degli algoritmi che non sono controllati da alcun parametro (Hill Climbing). Nel paragrafo 5.2.1.2.8 è effettuato un confronto fra i risultati ottenuti.

Il criterio di arresto prevede l'esplorazione di $2\times10^4$ configurazioni topologiche (ad eccezione dell'Hill Climbing).

#### 5.2.1.2.1. Hill Climbing (HC)

L'Hill Climbing non è regolato da alcun parametro e dunque non necessita di alcuna calibrazione.

Nella Tab. 5.2 sono riporati i risultati delle elaborazioni effettuate per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto. Nel primo è stato necessario esplorare 292 configurazioni topologiche prima di individuare un minimo locale, mentre nel secondo caso è stato necessario esplorarne 873. Dunque in entrambi i casi il numero di soluzioni esplorate è nettamente inferiore al limite previsto ($2\times10^4$).

**Tab. 5.2 – Risultati delle elaborazioni: Hill Climbing (HC)**

| Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|
| w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| 681,1 | 13,07% | 1765,6 | 1,82% |
| $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

#### 5.2.1.2.2. Simulated Annealing (SA)

I parametri che controllano la specificazione proposta del Simulated Annealing sono due: la temperatura iniziale, $\tau_0$, e la temperatura finale $\tau_f$ (le cui unità di misura sono le stesse di quella utilizzata per la funzione obiettivo). La lunghezza del plateau è fissata ($\lambda_p = 100$) e il tasso di raffreddamento, $\alpha_c$, è calcolabile in funzione delle temperature iniziali e finali.

Nella Tab. 5.3 sono riporati i risultati delle elaborazioni effettuate al variare dei parametri da calibrare, per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto. Il fatto più evidente è che i peggiori risultati si ottengono partendo da alte temperatue ($\tau_0 = 1000$ h) è terminando a temperature ancora piuttosto elevate ($\tau_f = 10 \div 100$ h). I migliori risultati si ottengono invece utilizzando temperature piuttosto basse ($\tau_0 = 10$ h; $\tau_f = 1$ h), oppure una elevata escursione termica ($\tau_0 = 1000$ h; $\tau_f = 0{,}1$ h). In particolare questo ultimo caso sembra essere il miglior compromesso fra i risultati ottenuti con i due sistemi di trasporto. Avendo individuato come ottimale un set di valori estremi rispetto a quelli considerati nelle prove effettuate, per controllo è stato verificato che l'utilizzo di escursioni termiche più elevate conduce ad un rapido peggioramento dei risultati ottenuti.

In definitiva, considerando che i valori di temperatura individuati non sono rilevanti in valore assoluto, ma è rilevante il loro rapporto con il valore della funzione obiettivo[6], si propone di adottare i seguenti valori:[7]

[6] Anzi, a rigore, con la differenza dei valori di funzione obiettivo delle soluzioni analizzate.

[7] L'intervallo di valori proposto è fortemente condizionato dall'ipotesi di esplorare un numero di configurazioni topologiche dell'ordine di grandezza qui utilizzato ($10^4$).

$\tau_0 \cong w_0$

$\tau_f \cong 10^{-4} w_0$

**Tab. 5.3 – Risultati delle elaborazioni: Simulated Annealing (SA)**

| $\tau_0$ (h) | $\tau_f$ (h) | $\alpha_c$ | $\lambda_p$ | Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| 1000,0 | 100,0 | 0.989 | 100 | 776,1 | 0,94% | 1783,9 | 0,80% |
| 1000,0 | 10,0 | 0.977 | 100 | 776,1 | 0,94% | 1768,6 | 1,66% |
| 1000,0 | 1,0 | 0.966 | 100 | 719,8 | 8,13% | 1726,4 | 4,00% |
| 1000,0 | 0,1 | 0.955 | 100 | 692,0 | 11,68% | 1726,7 | 3,98% |
| 100,0 | 10,0 | 0.989 | 100 | 692,5 | 11,61% | 1743,0 | 3,08% |
| 100,0 | 1,0 | 0.977 | 100 | 721,9 | 7,86% | 1742,2 | 3,12% |
| 100,0 | 0,1 | 0.966 | 100 | 721,9 | 7,86% | 1737,4 | 3,39% |
| 10,0 | 1,0 | 0.989 | 100 | 690,9 | 11,82% | 1729,4 | 3,84% |
| 10,0 | 0,1 | 0.977 | 100 | 691,8 | 11,70% | 1739,5 | 3,27% |
| 1,0 | 0,1 | 0.989 | 100 | 708,4 | 9,59% | 1767,8 | 1,70% |
| | | | | $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

### 5.2.1.2.3. Tabu Search (TS)

L'unico parametro che controlla la specificazione proposta del Tabu Search è la dimensione della tabu list, $\lambda_l$.

Nella Tab. 5.4 sono riporati i risultati delle elaborazioni effettuate al variare del parametro da calibrare, per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto. Si deduce che esiste un intervallo di valori della dimensione della tabu list che garantisce i migliori risultati: da 5 a 30 per Villa San Giovanni e da 30 a 45 per Barcellona Pozzo di Gotto. Pertanto il migliore compromesso è l'utilizzo di un valore intorno a 30.

**Tab. 5.4 – Risultati delle elaborazioni: Tabu Search (TS)**

| $\lambda_l$ | Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|---|
| | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| 0 | 681,1 | 13,07% | 1765,6 | 1,82% |
| 5 | 641,0 | 18,19% | 1757,6 | 2,27% |
| 10 | 635,5 | 18,89% | 1752,2 | 2,57% |
| 15 | 626,9 | 19,99% | 1747,1 | 2,85% |
| 20 | 657,3 | 16,11% | 1747,5 | 2,83% |
| 25 | 675,9 | 13,73% | 1750,7 | 2,65% |
| 30 | 631,4 | 19,42% | 1735,7 | 3,48% |
| 35 | 675,9 | 13,73% | 1745,1 | 2,96% |
| 40 | 675,9 | 13,73% | 1726,5 | 4,00% |
| 45 | 675,9 | 13,73% | 1742,2 | 3,12% |
| 50 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 55 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 60 | 675,9 | 13,73% | 1747,4 | 2,84% |
| 65 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 70 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 75 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| | $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

Considerando che la dimensione della tabu list è un valore che dovrebbe essere correlato col numero di sequenze in progetto[8], si propone di adottare il seguente valore:

$$\lambda_l \cong |L_1 \cup L_2| \tag{5.1}$$

### 5.2.1.2.4. Genetic Algorithms (GA)

I parametri che controllano la specificazione proposta dei Genetic Algorithms sono quattro: la cardinalità della popolazione, $\nu_p$, il parametro di selettività, $\alpha_r$, la frequenza del crossover, $\varphi_c$, e la frequenza della mutazione, $\varphi_m$.

Per questo algoritmo esiste in letteratura [24] un set di parametri calibrato su reti test ($\nu_p = 40$; $\alpha_r = 70$; $\varphi_c = 0{,}40$; $\varphi_m = 0{,}20$). Considerato il notevole numero di parametri da calibrare, si è proceduto effettuando un'analisi di sensitività variando uno alla volta i parametri, adottando una volta un valore inferiore ed una seconda volta un valore superiore. Nella Tab. 5.5 sono riportati i risultati delle elaborazioni effettuate per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto; i valori dei parametri modificati rispetto al set di parametri di base sono riportati in grassetto per una più immediata lettura. Si può osservare che riducendo la frequenza della mutazione al valore $\varphi_m = 0{,}10$ si ottiene un netto miglioramento, mentre le altre modifiche non comportano significative variazioni. Per controllare se un ulteriore riduzione della frequenza della mutazione avesse potuto consentire un ulteriore miglioramento dei risultati ottenuti, sono stati sperimentati valori più bassi ($\varphi_m = 0{,}05$; $\varphi_m = 0{,}01$) ottenendo tuttavia risultati peggiori.

In definitiva si propone di adottare i seguenti valori:[9]

$$\nu_p = 40$$

$$\alpha_r = 70$$

$$\varphi_c = 0{,}40$$

$$\varphi_m = 0{,}10$$

I risultati riportati nella Tab. 5.5 sono stati ottenuti utilizzando come funzione di adattamento una trasformazione esponenziale negativa della funzione obiettivo. Sono state sperimentate anche altre specificazioni dei Genetic Algorithms che utilizzano funzioni di adattamento basate sul ranking delle soluzioni (ranking lineare, ranking non lineare, troncamento, torneo). I risultati di queste sperimentazioni, condotte in maniera non sistematica, hanno messo in luce che è possibile migliorare ulteriormente la performance di questo algoritmo. Tuttavia i miglioramenti ottenuti, almeno al momento, sono di modesta entità e dunque si è preferito estendere l'indagine verso altre direzioni rimandando ad

[8] Con maggiore correttezza sarebbe possibile mettere in relazione la dimensione della tabu list con il numero di soluzioni contenute nell'intorno, calcolabili grazie alla (4.6).

[9] L'intervallo di valori proposto è valido nell'ipotesi in cui il numero di sequenze è paragonabile a quello dei sistemi di trasporto utilizzati per le calibrazioni. Alcuni parametri, ed in particolar modo la cardinalità della popolazione, potrebbero dovere essere significativamente modificati al variare del numero di sequenze in progetto.

ulteriori approfondimenti l'utilizzo di specificazioni alternative della funzione di adattamento.

**Tab. 5.5 – Risultati delle elaborazioni: Genetic Algorithms (GA)**

| $\nu_p$ | $\alpha_r$ | $\varphi_c$ | $\varphi_m$ | Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| 40 | 70 | 0,40 | 0,20 | 719,4 | 8,18% | 1743,5 | 3,05% |
| **20** | 70 | 0,40 | 0,20 | 710,1 | 9,36% | 1750,3 | 2,67% |
| **80** | 70 | 0,40 | 0,20 | 709,9 | 9,39% | 1743,9 | 3,03% |
| 40 | **7** | 0,40 | 0,20 | 712,2 | 9,10% | 1756,4 | 2,33% |
| 40 | **700** | 0,40 | 0,20 | 718,6 | 8,29% | 1742,2 | 3,12% |
| 40 | 70 | **0,20** | 0,20 | 733,1 | 6,43% | 1737,8 | 3,37% |
| 40 | 70 | **0,80** | 0,20 | 705,3 | 9,98% | 1739,9 | 3,25% |
| 40 | 70 | 0,40 | **0,10** | 641,5 | 18,13% | 1722,7 | 4,21% |
| 40 | 70 | 0,40 | **0,40** | 725,9 | 7,36% | 1754,0 | 2,47% |
| | | | | $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

### 5.2.1.2.5. Metodo ibrido 1 (TS+GA)

I parametri che controllano la specificazione proposta di questo metodo ibrido sono sei: oltre quelli che intervengono nel Tabu Search ($\lambda_l$) e nei Genetic Algorithms ($\nu_p$, $\alpha_r$, $\varphi_c$, $\varphi_m$) è infatti necessario definire la frazione di soluzioni esplorate col Tabu Search, indicata col simbolo $\tau_{\%}$.

Dato il notevole numero di parametri da calibrare, per quelli che intervengono nelle fasi del Tabu Search e dei Genetic Algorithms si è scelto di utilizzare i valori che si sono rivelati migliori nelle calibrazioni precedentemente effettuate per i singoli metodi (vedi paragrafi 5.2.1.2.3 e 5.2.1.2.4). La frazione di soluzioni esplorate col Tabu Search è stata invece fissata al valore

$$\tau_{\%} = 75\%$$

e di conseguenza la frazione di soluzioni esplorate con i Genetic Algorithms risulta

$$1 - \tau_{\%} = 25\%$$

La ragione che ha portato a dedicare un minore tempo di elaborazione ai Genetic Algorithms è che questo metodo è caratterizzato da una riduzione del valore della funzione obiettivo maggiormente concentrata nelle prime iterazioni.

Nella Tab. 5.6 sono riportati i risultati ottenuti per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto, utilizzando i parametri sopra descritti. Si osserva che non sono stati ottenuti risultati migliori di quelli conseguiti utilizzando i singoli metodi separatamente (vedi Tab. 5.4 e Tab. 5.5)[10]. Inoltre, solo in un caso (utilizzando la sequenza GA→TS sul sistema di trasporto di Barcellona Pozzo di Gotto) l'applicazione del secondo algoritmo (Tabu Search) ha consentito di migliorare ulteriormente la migliore soluzione prodotta dal primo algoritmo (Genetic Algorithms).

[10] Alcune sperimentazioni condotte variando i parametri in maniera non sistematica hanno messo in luce che questo algoritmo, nella variante TS→GA, consente di individuare soluzioni leggermente migliori rispetto a quelle ottenute applicando i singoli algoritmi separatamente se vengono adottate frequenze di mutazione molto basse ($\varphi_m$ = 0,01 ÷ 0,02).

**Tab. 5.6 – Risultati delle elaborazioni: metodo ibrido 1 (TS+GA)**

| Sequenza di esecuzione | Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|---|
| | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| TS→GA | 626,9 | 19,99% | 1726,5 | 4,00% |
| GA→TS | 641,5 | 18,13% | 1742,4 | 3,11% |
| | $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

## 5.2.1.2.6. Metodo ibrido 2 (TS+PR)

L'unico parametro che controlla la specificazione proposta di questo metodo ibrido è la dimensione della tabu list, $\lambda_l$.

Nella Tab. 5.7 sono riporati i risultati delle elaborazioni effettuate al variare del parametro da calibrare, per i due sistemi di trasporto considerati. Nel caso di Villa San Giovanni si osserva che tale metodo riesce a garantire quasi sempre risultati migliori rispetto al Tabu Search, ed in particolare esiste un range di valori della dimensione della tabu list (da 20 a 45) dove esso è sempre migliore. Nel caso di Barcellona le indicazioni sono invece contrastanti: in alcuni casi esso si rivela migliore del Tabu Search, mentre in quasi altrettanti esso si rivela peggiore.

Dall'analisi dei risultati, così come per il Tabu Search, si deduce che è conveniente adottare un valore di dimensione della tabu list vicino al numero di sequenze in progetto

$$\lambda_l \cong |L_1 \cup L_2|$$

**Tab. 5.7 – Risultati delle elaborazioni: metodo ibrido 2 (TS+PR)**

| $\lambda_l$ | Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|---|
| | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| 0 | 681,1 | 13,07% | 1765,6 | 1,82% |
| 5 | 641,0 | 18,19% | 1757,6 | 2,27% |
| 10 | 641,0 | 18,19% | 1752,2 | 2,57% |
| 15 | 626,9 | 19,99% | 1750,0 | 2,69% |
| 20 | 629,1 | 19,71% | 1744,4 | 3,00% |
| 25 | 652,2 | 16,76% | 1744,8 | 2,98% |
| 30 | 621,3 | 20,70% | 1744,8 | 2,98% |
| 35 | 657,5 | 16,08% | 1751,4 | 2,61% |
| 40 | 661,5 | 15,57% | 1723,8 | 4,15% |
| 45 | 624,7 | 20,27% | 1740,9 | 3,19% |
| 50 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 55 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 60 | 675,9 | 13,73% | 1747,4 | 2,84% |
| 65 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 70 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| 75 | 675,9 | 13,73% | 1751,4 | 2,61% |
| | $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

## 5.2.1.2.7. Hill Climbing con intorno doppio (HC2)

L'Hill Climbing con intorno doppio non è regolato da alcun parametro e dunque non necessita di alcuna calibrazione.

Nella Tab. 5.8 sono riporati i risultati delle elaborazioni effettuate per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto. Nel primo è stato necessario esplorare 12˙147 configurazioni topologiche prima di individuare un minimo locale, mentre nel secondo caso è stato necessario esplorarne 17˙737. Dunque in entrambi i casi il numero di soluzioni esplorate è stato comunque inferiore al limite previsto ($2\times10^4$).

**Tab. 5.8 – Risultati delle elaborazioni: Hill Climbing con intorno doppio (HC2)**

| Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|
| w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| 622,4 | 20,56% | 1750,0 | 2,69% |
| $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

### 5.2.1.2.8. Confronto fra i risultati ottenuti

I migliori risultati ottenuti per ciascun metodo sono riepilogati nella tab. 5.8 per consentire un più rapido confronto. Tuttavia tale confronto è da considerarsi preliminare sia perché il numero di esperimenti non è uguale per tutti i metodi, sia perché sono stati utilizzati tipi diversi di set di parametri per ogni metodo. Infatti per quanto riguarda i Genetic Algorithms in questo studio ci si è serviti di una combinazione di parametri nota in letteratura [24] che è stata calibrata su reti test, e sono state effettuate delle analisi di sensitività variando un parametro alla volta. Invece per il Tabu Search, applicato singolarmente o in combinazione col Path Relinking (metodo ibrido 2), ed il Simulated Annealing sono stati utilizzati set di parametri che variano su un più ampio intervallo poiché non sono mai stati sperimentati in precedenza. L'Hill Climbing, indipendentemente dall'intorno col quale è applicato, non richiede parametri. Le due varianti del metodo ibrido 1, che combina Tabu Search e Genetic Algorithms, sono state applicate utilizzando per ciascuno dei due algoritmi il set di parametri che aveva dato i migliori risultati quando questi sono stati applicati singolarmente.

**Tab. 5.8 – Confronto fra i migliori risultati ottenuti con tutti gli algoritmi**

| Algoritmo | Villa San Giovanni | | Barcellona P. di G. | |
|---|---|---|---|---|
| | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ | w* (h) | $\Delta w^{\%}$ |
| HC | 681,1 | 13,07% | 1765.6 | 1.82% |
| SA | 690,9 | 11,82% | 1726.4 | 4.00% |
| TS | 626,9 | 19,99% | 1726.5 | 4.00% |
| GA | 641,5 | 18,13% | 1722.7 | 4.21% |
| TS+GA | 626,9 | 19,99% | 1726.5 | 4.00% |
| TS+PR | 621,3 | 20,70% | 1723.8 | 4.15% |
| HC2 | 622,4 | 20,56% | 1750,0 | 2,69% |
| | $w_0$ = 783,5 h | | $w_0$ = 1798,3 h | |

Tutti i risultati ottenuti (considerando tutti gli algoritmi e tutti i parametri utilizzati) consentono una riduzione percentuale della funzione obiettivo compresa negli intervalli 0,9% ÷ 20,7% nel caso di Villa San Giovanni e 0,8% ÷ 4,2% nel caso di Barcellona Pozzo di Gotto. Questi intervalli sono alquanto ampi e pertanto è evidente la necessità di utilizzare i migliori algoritmi con i migliori parametri. Gli intervalli di decremento della funzione obiettivo ottenuti per ciascun metodo al variare dei parametri utilizzati sono

rappresentati nelle Fig. 5.10 e Fig. 5.11 rispettivamnte per i sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona Pozzo di Gotto.

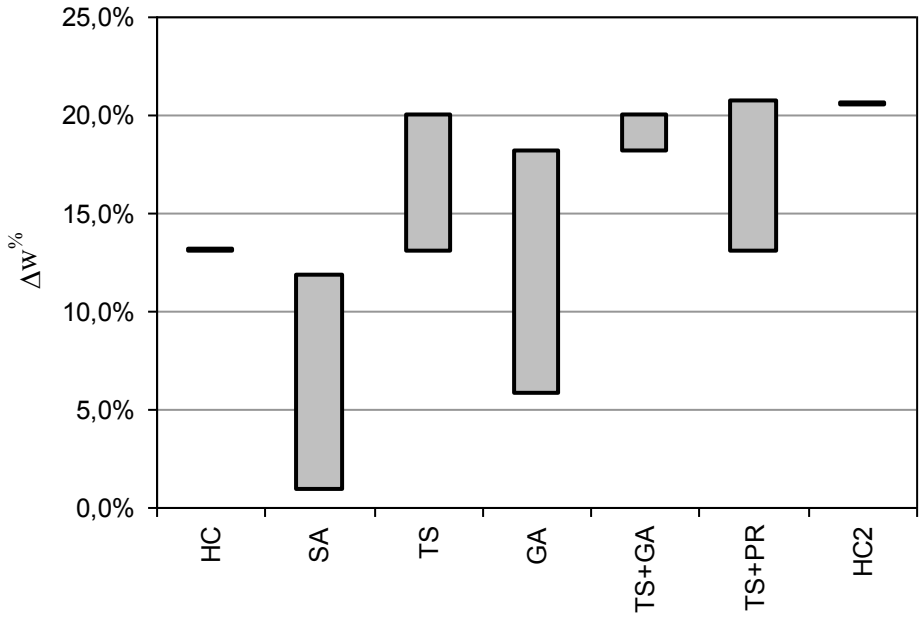



**Fig. 5.10 – Range di decremento della funzione obiettivo al variare dei parametri utilizzati (Villa San Giovanni)**

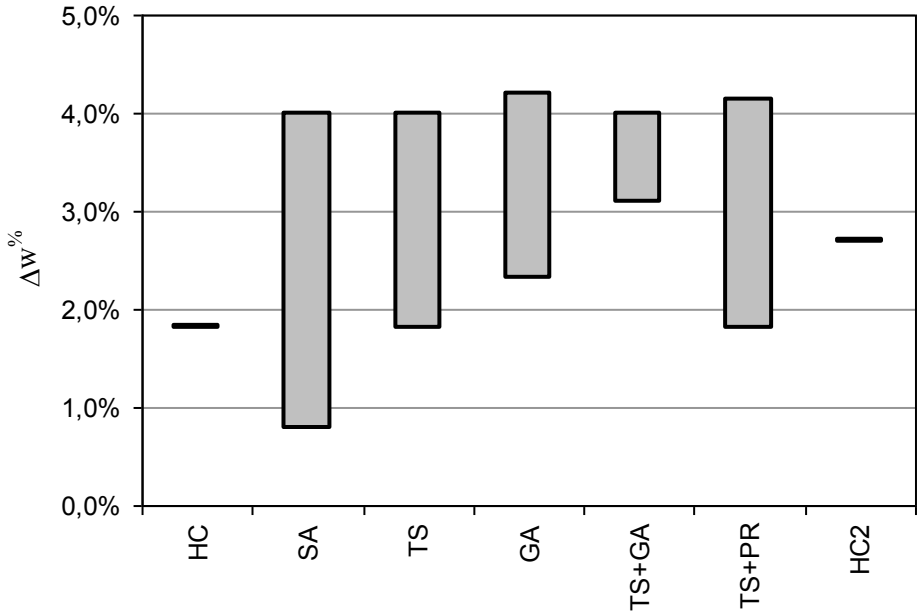



**Fig. 5.11 – Range di decremento della funzione obiettivo al variare dei parametri utilizzati (Barcellona Pozzo di Gotto)**

I risultati ottenuti sembrano indicare quale miglior algoritmo il Tabu Search, applicato singolarmente o in combinazione col Path Relinking (metodo ibrido 2). Anche i Genetic Algorithms sono competitivi. Il metodo ibrido 1, che combina Tabu Search e Genetic

Algorithms, non sembra essere migliore dei due metodi presi singolarmente. Il Simulated Annealing ha prodotto risultati contrastanti sulle due reti (fra i migliori su Barcellona Pozzo di Gotto e fra i peggiori su Villa San Giovanni). Infine può essere osservato che l'Hill Climbing nonostante la sua semplicità è talvolta più efficiente di molti altri algoritmi testati; in particolare quando esso è applicato con l'intorno doppio è talvolta in grado di raggiungere risultati eccellenti (ad esempio sul sistema di trasporto di Villa San Giovanni).

I risultati sembrano indicare una certa influenza della rete di trasporto (e dell'area di progetto) sull'efficienza degli algoritmi. In particolare gli algoritmi stocastici (Simulated Annealing e Genetic Algorithms) mostrano un comportamento migliore sulla rete di Barcellona Pozzo di Gotto. Questo è probabilmente dovuto al fatto che nella rete di Villa San Giovanni alcune sequenze sono molto critiche (nel senso che la loro variazione ha una grande influenza e potrebbe anche facilmente rendere disconnessa la rete), mentre nella rete di Barcellona Pozzo di Gotto (dove solo una parte della rete è in progetto) le variazioni sono meno critiche e pertanto ciò penalizza in maniera minore i metodi stocastici.

## 5.2.2. Analisi e confronto delle soluzioni

In questo paragrafo sono descritte e analizzate le sperimentazioni effettuate al fine di analizzare e confrontare le caratteristiche delle soluzioni generate utilizzando le differenti metaeuristiche proposte per la fase di progetto della topologia.

Per effettuare un migliore confronto è stato utilizzato un sistema di trasporto diverso da quelli utilizzati per la calibrazione dei parametri; tale sistema è descritto nel paragrafo 5.2.2.1. I risultati ottenuti sono riportati e analizzati nel paragrafo 5.2.2.2.

### 5.2.2.1. Sistema di trasporto utilizzato

Per effettuare l'analisi ed il confronto delle soluzioni ottenute con i vari algoritmi è stato utilizzato il sistema di trasporto di Melito Porto Salvo (RC), i cui dati relativi ai sistemi di domanda e di offerta sono stati forniti dal C.I.Su.T.[1].

L'area di studio considerata coincide l'intera area urbana, mentre l'area di progetto corrisponde alla zona centrale (vedi Fig. 5.12). La topologia della rimanente parte dell'area di studio non può essere progettata, poiché deve necessariamente essere costituita da archi a doppio senso di marcia per garantire la connessione alla rete dei centroidi esterni. Sono state individuate 34 sequenze in progetto, di cui nello stato di fatto:

- 6 sono ad una corsia (a senso unico di marcia);
- 7 sono a due corsie a senso unico di marcia;
- 21 sono a due corsie a doppio senso di marcia.

Le intersezioni in progetto sono quelle correlate con le sequenze (cioè vengono considerati i nodi per i quali almeno un arco della stella in ingresso o della stella in uscita appartiene ad una sequenza in progetto).

Le principali caratteristiche di questo sistema di trasporto sono riportate nella Tab. 5.9. Per quanto riguarda la domanda, la matrice origine-destinazione è riportata nella

Tab. 5.10; per quanto riguarda l'offerta, il grafo della rete di trasporto è rappresentato nella Fig. 5.13. Le sequenze di progetto individuate sono raffigurate nella Fig. 5.14.

Il valore della funzione obiettivo relativa alla configurazione topologica della stato di fatto è

$$w_0 = 918{,}2 \text{ h}$$

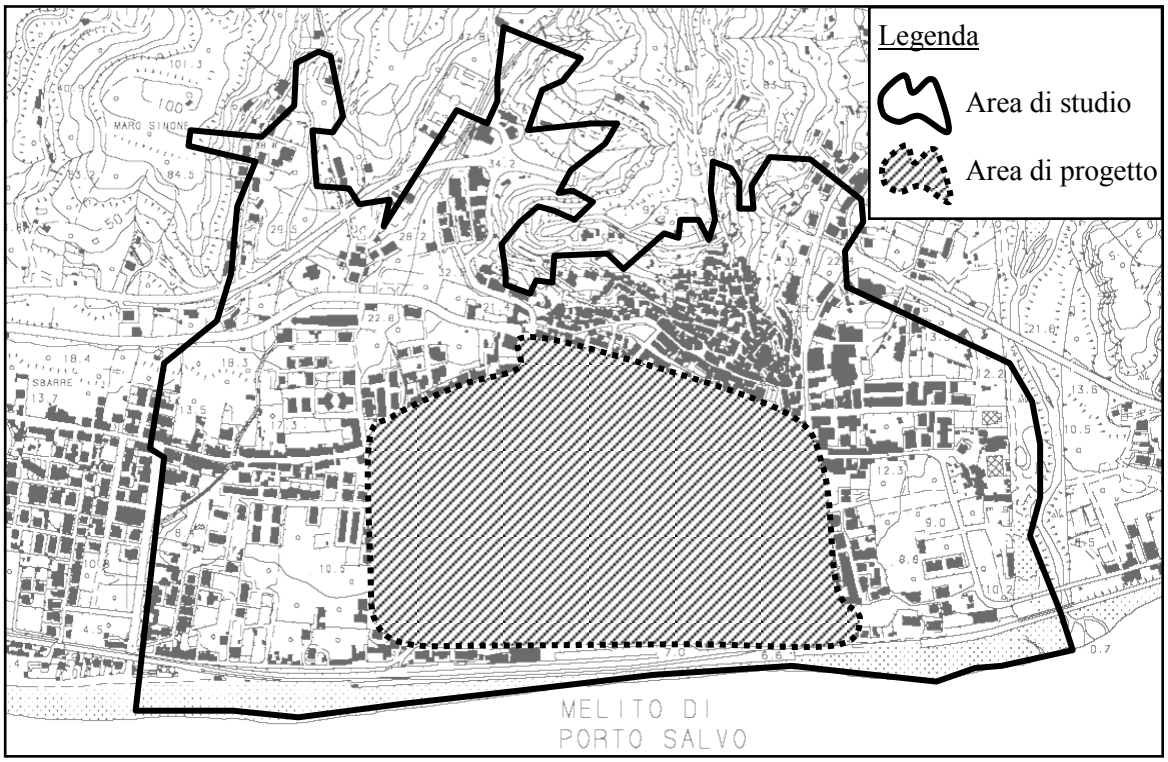



**Fig. 5.12 – Area di studio e area di progetto del sistema di trasporto di Melito Porto Salvo**

**Tab. 5.9 – Caratteristiche del sistema di trasporto di Melito Porto Salvo**

| | | |
|---|---|---|
| *Area di studio* | Abitanti | 10˙000 |
| | Spostamenti modo auto (ora di punta) | 3˙893 veic/h |
| | Coppie origine-destinazione | 342 |
| | Nodi | 96 |
| | Archi | 189 |
| | Lunghezza della rete | 23 km |
| *Area di progetto* | Sequenze | 34 |
| | Intersezioni | 37 |

**Tab. 5.10 – Matrice origine-destinazione del sistema di trasporto di Melito Porto Salvo**

| O \ D | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | *Tot.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 10 | 21 | 10 | 0 | 2 | 16 | 7 | 0 | 5 | 1 | 2 | 20 | 2 | 1 | 20 | 16 | *135* |
| 2 | 2 | 0 | 3 | 10 | 2 | 1 | 8 | 12 | 105 | 72 | 7 | 53 | 7 | 12 | 61 | 21 | 13 | 76 | 35 | *500* |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 1 | 0 | 5 | 5 | 0 | 6 | 37 | 2 | 3 | 31 | 59 | *164* |
| 4 | 3 | 30 | 0 | 0 | 68 | 4 | 28 | 3 | 5 | 1 | 24 | 57 | 14 | 16 | 106 | 40 | 26 | 24 | 17 | *466* |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 7 | 11 | 2 | 2 | 7 | 3 | 3 | 2 | 1 | *41* |
| 6 | 3 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 6 | 1 | 7 | 22 | 3 | 14 | 70 | 10 | 7 | 26 | 4 | *188* |
| 7 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 8 | 1 | 5 | 18 | 4 | 3 | 16 | 5 | *65* |
| 8 | 1 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 6 | 37 | 2 | 3 | 31 | 35 | *130* |
| 9 | 3 | 13 | 1 | 0 | 34 | 4 | 12 | 1 | 0 | 0 | 12 | 9 | 6 | 7 | 48 | 18 | 12 | 16 | 42 | *238* |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | 4 | 0 | *12* |
| 11 | 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 4 | 8 | 36 | 12 | 8 | 20 | 8 | *122* |
| 12 | 2 | 22 | 15 | 0 | 0 | 0 | 1 | 46 | 105 | 48 | 1 | 0 | 5 | 6 | 42 | 15 | 10 | 111 | 54 | *483* |
| 13 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 13 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 8 | 10 | 0 | 3 | 2 | *45* |
| 14 | 7 | 8 | 6 | 7 | 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 0 | 5 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 3 | *65* |
| 15 | 0 | 2 | 1 | 0 | 9 | 9 | 1 | 2 | 26 | 7 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | *73* |
| 16 | 6 | 7 | 3 | 5 | 26 | 26 | 4 | 9 | 99 | 26 | 4 | 16 | 7 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | *244* |
| 17 | 2 | 9 | 0 | 3 | 6 | 6 | 5 | 1 | 173 | 44 | 24 | 18 | 47 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *339* |
| 18 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 43 | 11 | 7 | 5 | 1 | 4 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | *83* |
| 19 | 11 | 68 | 25 | 1 | 18 | 23 | 36 | 80 | 37 | 4 | 83 | 71 | 31 | 4 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | *500* |
| *Tot.* | *43* | *189* | *59* | *36* | *189* | *92* | *111* | *173* | *636* | *223* | *189* | *301* | *135* | *98* | *511* | *144* | *90* | *387* | *287* | *3893* |

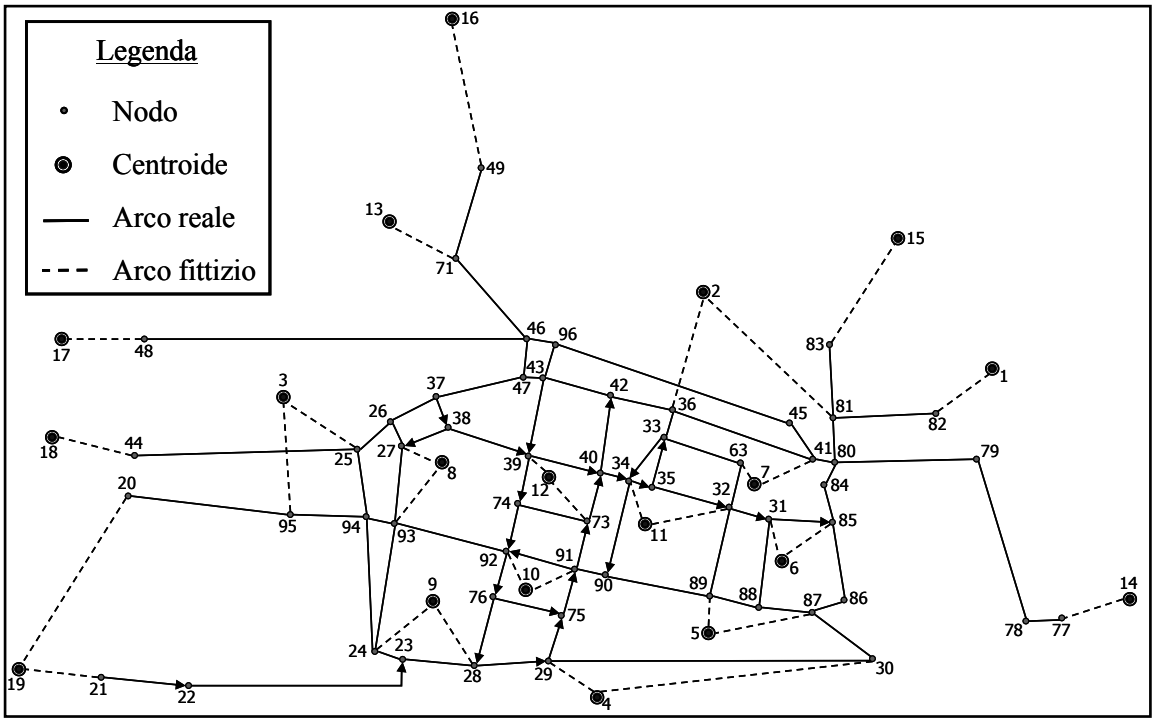



**Fig. 5.13 – Grafo della rete di trasporto di Melito Porto Salvo**

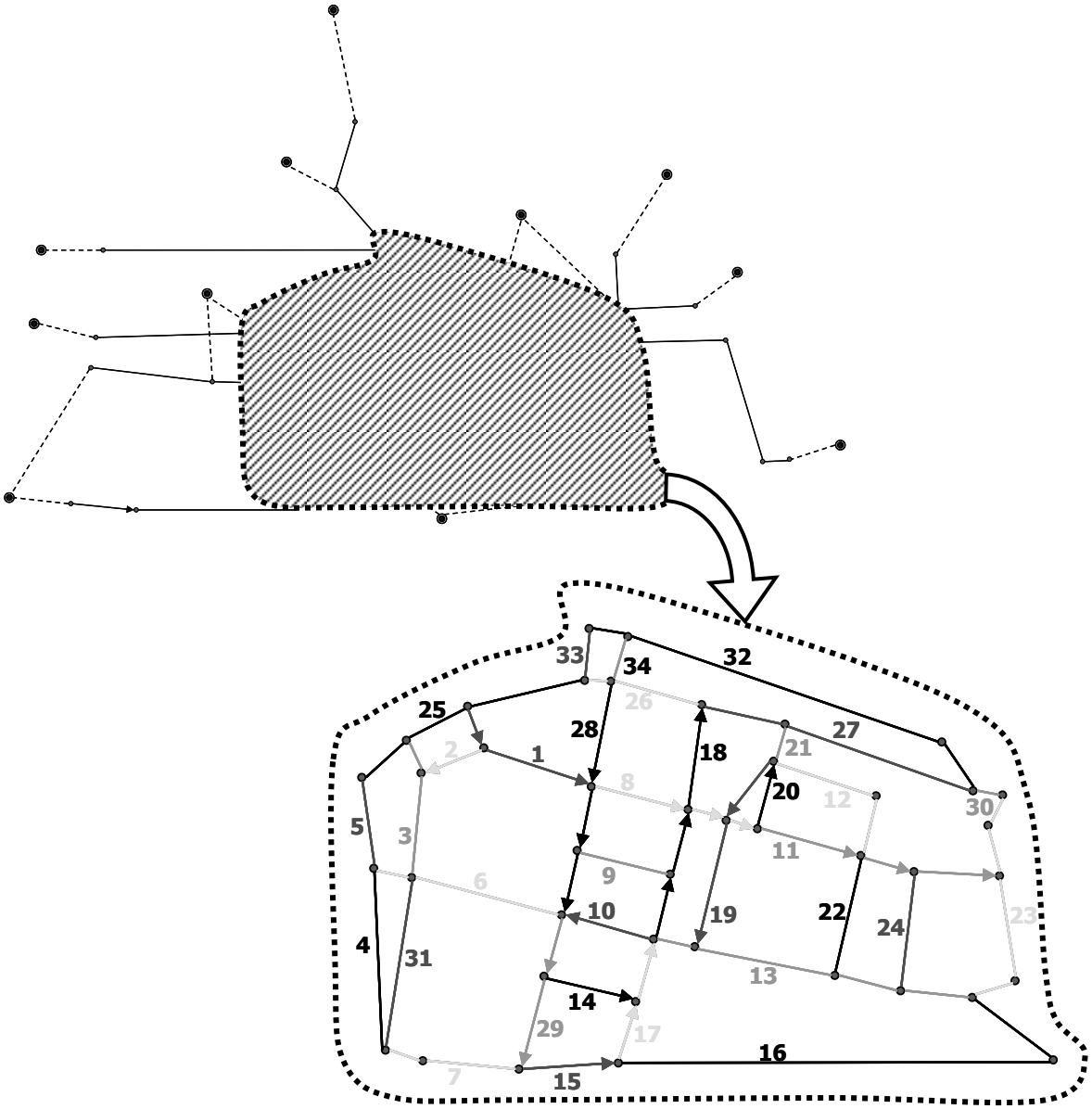



**Fig. 5.14 – Sequenze di progetto individuate nel sistema trasporto di Melito Porto Salvo**

### 5.2.2.2. Analisi dei risultati

Per confrontare i vari algoritmi utilizzati nella fase di progetto della topologia, essi sono stati applicati con i parametri calibrati in precedenza sul sistema di Melito Porto Salvo.

Essendo stato verificato che le metaeuristiche ibride garantiscono dei miglioramenti piccoli o nulli rispetto alle metaeuristiche semplici (vedi paragrafo 5.2.2) a fronte di una maggiore complessità, esse sono state escluse da ulteriori analisi. Pertanto il confronto è stato ristretto alle sole metaeuristiche semplici, che sono state applicate nel seguente modo:

- il Simulated Annealing (SA) con i seguenti parametri: $\tau_0 = 1000$ h; $\tau_f = 0{,}1$ h;

- il Tabu Search (TS) nella sua variante stocastica, con i seguenti parametri: $\lambda_{l,min} = 25$; $\lambda_{l,max} = 45$;[11]
- i Genetic Algorithms utilizzando la versione base (cioè quella caratterizzata da una funzione di adattamento che una trasformazione esponenziale negativa della funzione obiettivo), con i seguenti parametri: $\nu_p = 40$; $\alpha_r = 70$; $\varphi_c = 0{,}40$; $\varphi_m = 0{,}10$.

L'Hill Climbing, sia con intorno singolo (HC) che con intorno doppio (HC), non richiede la specificazione del valore di alcun parametro.

Sono state effettuate 5 elaborazioni per ogni algoritmo, variando per ciascuna di essa il seme del generatore congruenziale lineare di numeri pseudocasuali utilizzato (ad eccezione dell'Hill Climbing che essendo deterministico è stato applicato un'unica volta). Pertanto è stato possibile effettuare i confronti sulla base di valori medi, garantendo pertanto una maggiore affidabilità statistica. Il criterio di arresto prevede l'esplorazione di $5\times10^4$ configurazioni topologiche (ad eccezione dell'Hill Climbing).[12]

Un confronto dei risultati ottenuti in termini di riduzione della funzione obiettivo al variare dell'algoritmo utilizzato è riportato nel paragrafo 5.2.2.2.1. Un confronto in termini di velocità di convergenza è invece riportato nel paragrafo 5.2.2.2.2. Infine nel paragrafo 5.2.2.2.3 le soluzioni ottenute sono state analizzate in funzione di due criteri: il decremento della funzione obiettivo e la variazione topologica rispetto allo stato di fatto.

#### 5.2.2.2.1. Confronto dei risultati ottenuti al variare dell'algoritmo

I valori medi del decremento della funzione obiettivo per tutti gli algoritmi testati sono riportati nella Fig. 5.15, dove sono anche indicati con delle barre i valori minimi e massimi osservati per tali decrementi. L'Hill Climbing (HC) ha richiesto l'esplorazione di 836 configurazioni topologiche prima di raggiungere un minimo locale, mentre l'Hill Climbing con intorno doppio (HC2) ha esplorato 46˙031 configurazioni (valori in entrambi i casi inferiore al numero massimo di configurazioni che possono essere esplorate).

I risultati mostrano una sostanziale similitudine fra le performance di tutti gli algoritmi testati, ad eccezione dell'Hill Climbing (HC), che però esplora un numero di gran lunga inferiore di soluzioni. Le possibili ipotesi che spiegano questo fatto sono tre:

- l'efficienza degli algoritmi è effettivamente comparabile;
- tutti gli algoritmi riescono ad avvicinarsi all'ottimo globale e quindi il problema è troppo semplice per mettere in luce le differenze di efficienza degli algoritmi;
- i risultati ottenuti non dipendono significativamente dal particolare algoritmo utilizzato, ma solo dal numero di soluzioni esplorate.

La più insidiosa delle ipotesi è l'ultima, secondo la quale in altri termini gli algoritmi proposti non sono nulla di più che una generazione casuale di soluzioni. Per confutare tale ipotesi è stata effettuata una *Random Walk* (RW), cioè l'esplorazione dello spazio di ricerca seguendo una serie di mosse assolutamente casuali[13]; anche questo algoritmo è stato arrestato dopo avere esplorato $5\times10^4$ configurazioni topologiche. Il risultato ottenuto

[11] L'utilizzo della variante stocastica consente di eseguire più prove a partire dalla stessa soluzione iniziale, e l'utilità di ciò sarà chiarita fra breve. L'intervallo di valori all'interno del quale varia la dimensione della tabu list è stato determinato calcolandone il valore centrale con la (5.1) e considerando una semiampiezza pari a 10 (a rigore l'intervallo così ottenuto avrebbe come estremi: $\lambda_{l,min} = 24$; $\lambda_{l,max} = 44$).

[12] Si ricordi che durante le calibrazioni le configurazioni topologiche esplorate erano $2\times10^4$.

[13] Ciò è equivalente ad eseguire il Simulated Annealing a temperatura infinita (molta alta in termini pratici).

è pari ad un decremento della funzione obiettivo pari a $\Delta w^{\%} = 1{,}55\%$ (rappresentato con una linea tratteggiata nella Fig. 5.15), che è significativamente inferiore agli altri risultati e dunque consente di scartare questa ultima ipotesi. Per discriminare fra le prime due ipotesi, essendo impraticabile l'applicazione di un algoritmo esatto per conoscere l'ottimo globale, è necessario effettuare ulteriori prove su altri sistemi di trasporto.

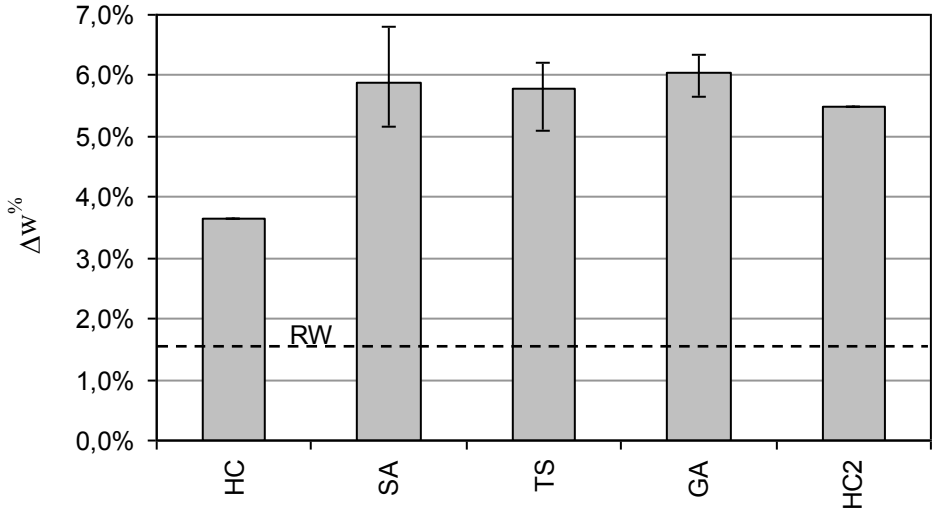



**Fig. 5.15 – Confronto fra i risulati ottenuti al variare dell'algoritmo utilizzato**

### 5.2.2.2.2. Confronto della velocità di convergenza al variare dell'algoritmo

Nella Fig. 5.16 sono confrontati gli andamenti del valore della funzione obiettivo durante l'esecuzione degli algoritmi. Per ogni algoritmo è stata considerata un'unica elaborazione, quella il cui valore di decremento finale della funzione obiettivo è il più prossimo al valore medio ottenuto per quello stesso algoritmo. Analizzando le evoluzioni degli algoritmi rappresentate nella figura è possibile affermare che l'Hill Climbing applicato con intorno singolo, il Tabu Search e i Genetic Algorithms consentono di ottenere rapidamente fin dalle prime iterazioni riduzioni consistenti del valore della funzione obiettivo, mentre il Simulated Annealing e l'Hill Climbing applicato con intorno doppio sono caratterizzati da una convergenza molto più lenta al valore finale della funzione obiettivo. Tali risultati sono stati confermati da ulteriori indagini effettuate considerando i sistemi di trasporto descritti nel paragrafo 5.2.1.1.

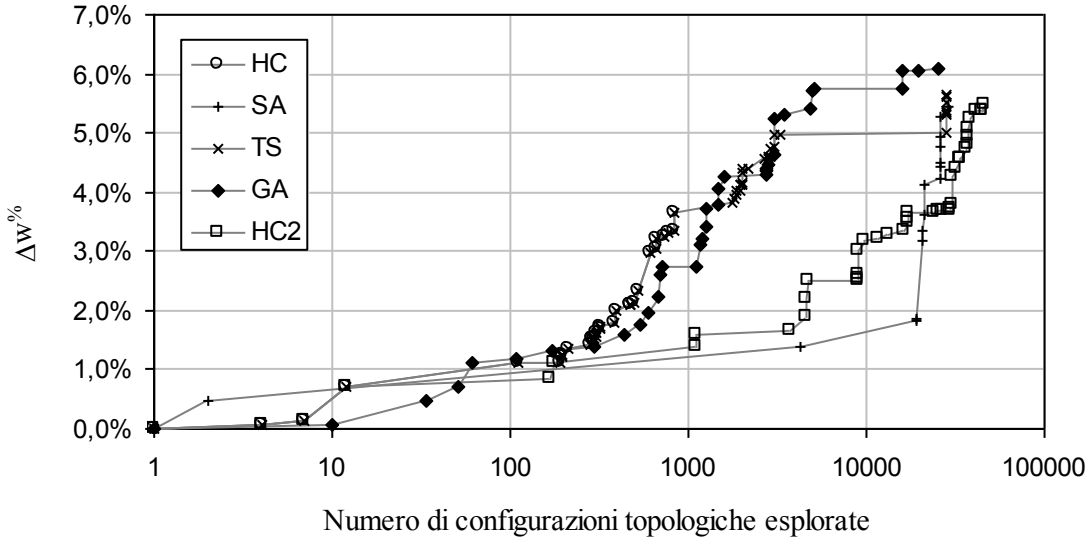



**Fig. 5.16 – Confronto delle velocità di convergenza al variare dell'algoritmo utilizzato**

### 5.2.2.2.3. Analisi multicriteria

Le migliori soluzioni individuate ad ogni elaborazione sono state analizzate in funzione di due criteri: oltre alla riduzione della funzione obiettivo, $\Delta w^{\%}$, è stata considerata la percentuale di sequenze variate rispetto allo stato di fatto, $\Delta \rho^{\%}$. È evidente che a parità di decremento della funzione obiettivo è preferibile scegliere la soluzione che modifica in maniera minore lo stato di fatto.

Nella Fig. 5.17 sono considerate tutte le migliori soluzioni ottenute (in termini di decremento della funzione obiettivo) nelle elaborazioni effettuate; esse sono rappresentate in un grafico che ha in ascissa la riduzione della funzione obiettivo e in ordinata la percentuale di sequenze variate. Per avere a disposizione un dato più immediatamente leggibile e sintetico, nella Fig. 5.18 sono stati rappresentati per ogni algoritmo dei punti che rappresentano il baricentro di quelli rappresentati nella Fig. 5.17.

Si può osservare che il Simulated Annealing, il Tabu Search ed i Genetic Algorithms producono risultati molti simili oltre che in termini di funzione obiettivo, anche in termini di percentuale di sequenze variate rispetto allo stato di fatto. Infatti nella Fig. 5.18 i punti rappresentativi dei risultati ottenuti con questi tre algoritmi, racchiusi in una circonferenza tratteggiata, sono molto vicini fra loro. Tuttavia questo risultato non va erroneamente interpretato assumendo che i tre algoritmi producono soluzioni topologicamante simili fra loro; infatti, prese a caso due soluzioni ottenute con questi algoritmi, esse sono mediamente differenti fra loro nel 54% delle sequenze.

Un ulteriore aspetto degno di nota è che le soluzioni generate con il Simulated Annealing, il Tabu Search ed i Genetic Algorithms (cioè quelle idealmente racchiuse nella circonferenza tratteggiata in Fig. 5.18) conducono ad una riduzione delle sequenze a doppio senso di marcia, che passano dal 62% dello stato di fatto ad un valore medio del 34%.

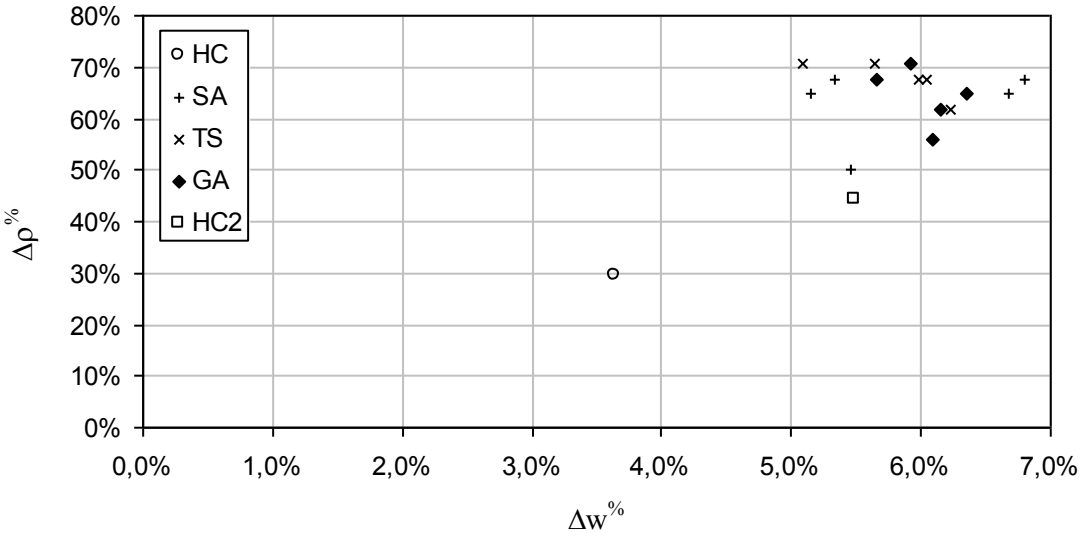



**Fig. 5.17 – Analisi multicriteria delle soluzioni ottenute**

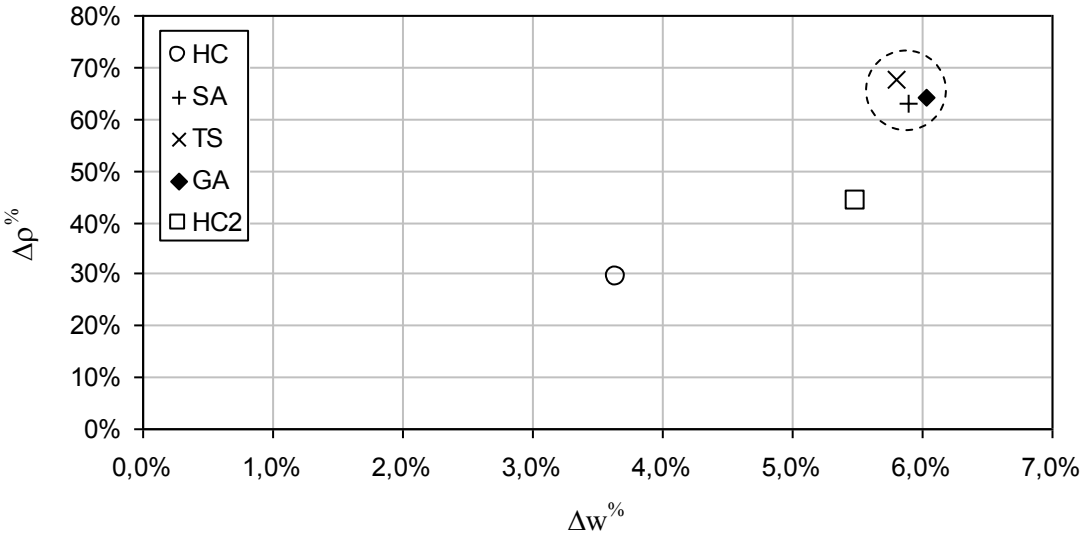



**Fig. 5.18 – Analisi multicriteria delle soluzioni ottenute (valori baricentrici)**

Nella Fig. 5.19 sono state rappresentate per ciascun algoritmo tutte le soluzioni esplorate non dominate rispetto ai due criteri considerati. In particolare, per ogni algoritmo è stata considerata un'unica elaborazione, quella il cui valore di decremento della funzione obiettivo è il più prossimo al valore medio ottenuto per quello stesso algoritmo. Sempre nella Fig. 5.19 è rappresentata la frontiera di Pareto ottenuta considerando le soluzioni non dominate rispetto a tutti gli algoritmi utilizzati. Si può osservare che la quasi totalità di questa curva è basata sulle soluzioni individuate dall'Hill Climbing applicato con intorno doppio (HC2). Quando solo poche sequenze sono modificate, questo algoritmo consente di ottenere le migliori riduzioni del valore della funzione obiettivo.

Grazie all'utilizzo dell'intorno doppio è possibile ottenere, rispetto all'intorno singolo, più alte riduzioni della funzione obiettivo a parità di sequenze modificate. Questo fatto è evidente se si osservano i risultati ottenuti ad ogni iterazione utilizzando l'Hill Climbing

con intorno singolo (HC) e con intorno doppio (HC2), che sono messi a confronto nella Fig. 5.20.

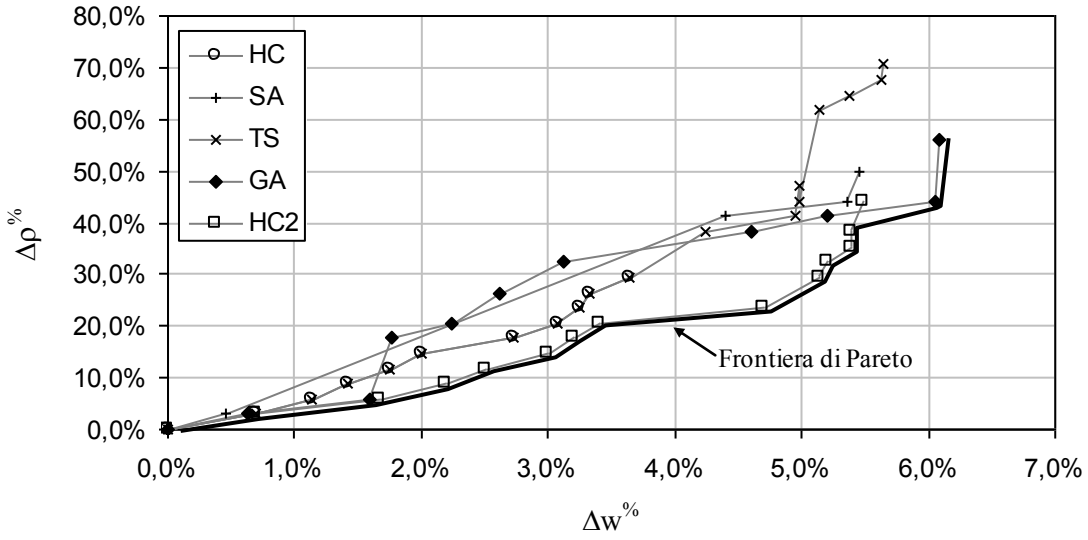



**Fig. 5.19 – Analisi multicriteria delle soluzioni ottenute (frontiera di Pareto)**

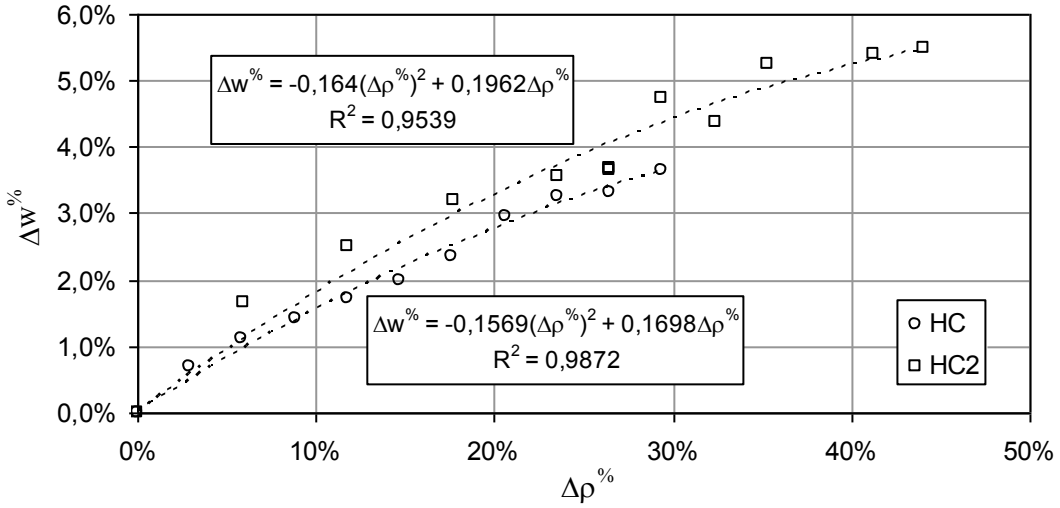



**Fig. 5.20 – Confronto fra l'intorno singolo e l'intorno doppio (Hill Climbing)**

## 5.2.3. Confronto col Piano Urbano del Traffico

In questo paragrafo sono descritte e analizzate le sperimentazioni effettuate al fine di confronater le configurazioni proposte da un Piano Urbano del Traffico redatto dal C.I.Su.T.[1] nel rispetto delle migliori pratiche professionali correnti con le soluzioni individuate dagli algoritmi proposti.

Il sistema di trasporto considerato è quello di Melito Porto Salvo, già descritto nel paragrafo 5.2.2.1. Gli obiettivi e le proposte del Piano Urbano del Traffico sono

brevemente descritte nel 5.2.3.1. Il confronto fra le soluzioni del Piano e quelle individuate grazie agli algoritmi proposti è riportato nel paragrafo 5.2.3.2.

### 5.2.3.1. Obiettivi e proposte del Piano Urbano del Traffico

Il Piano Urbano del Traffico si pone fra gli obiettivi principali l'agevolazione di modalità di trasporto alternative agli autoveicoli (piedi, bicicletta, trasporto collettivo) e la riduzione dei punti di conflitto più pericolosi. La riduzione del tempo totale di viaggio non è visto come uno degli obiettivi principali.

Al fine di favorire le utenze deboli (piedi e bicicletta) e moderare la velocità del traffico veicolare in alcuni punti, le soluzioni proposte dal Piano prevedono interventi di riduzione delle sezioni stradali, con conseguente diminuizione della capacità. Un esempio di questa tipologia di interventi è rappresentato nella Fig. 5.21.

Il Piano Urbano del Traffico propone due configurazioni:

- la configurazione 1P, rappresentata nella figura Fig. 5.22, cui è associato un decremento percentuale della funzione obiettivo pari a $\Delta w^{\%} = -10{,}8\%$;
- la configurazione 2P, rappresentata nella figura Fig. 5.23, cui è associato un decremento percentuale della funzione obiettivo pari a $\Delta w^{\%} = -5{,}7\%$.

I valori negativi dei decrementi della funzione obiettivo significano che in realtà essa cresce, cioè peggiora. Questo fatto non deve tuttavia essere visto come paradossale, perché la funzione obiettivo considerata in questo studio, cioè il tempo totale di viaggio, non è uno degli obiettivi primari che si pone il Piano Urbano del Traffico.

Fra le due configurazioni proposte, nel Piano è espressa una preferenza per la seconda, che dunque sarà considerata come termine di paragone per le successive analisi.

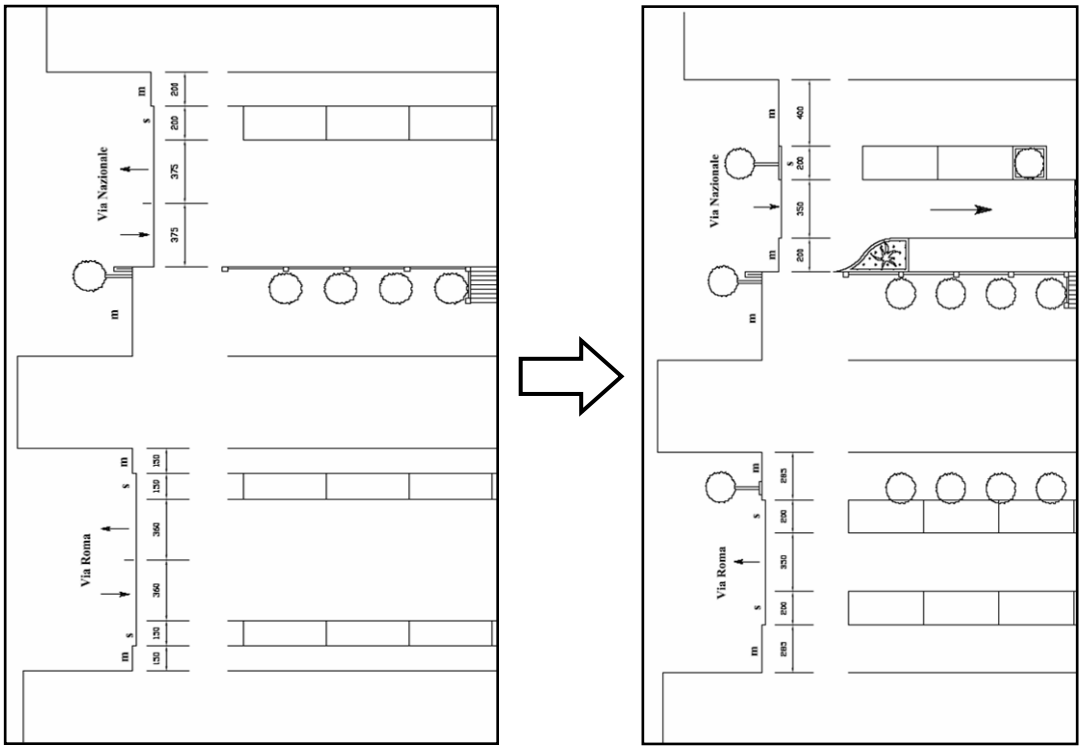



**Fig. 5.21 - Esempi di interventi di riduzione della capacità stradale**

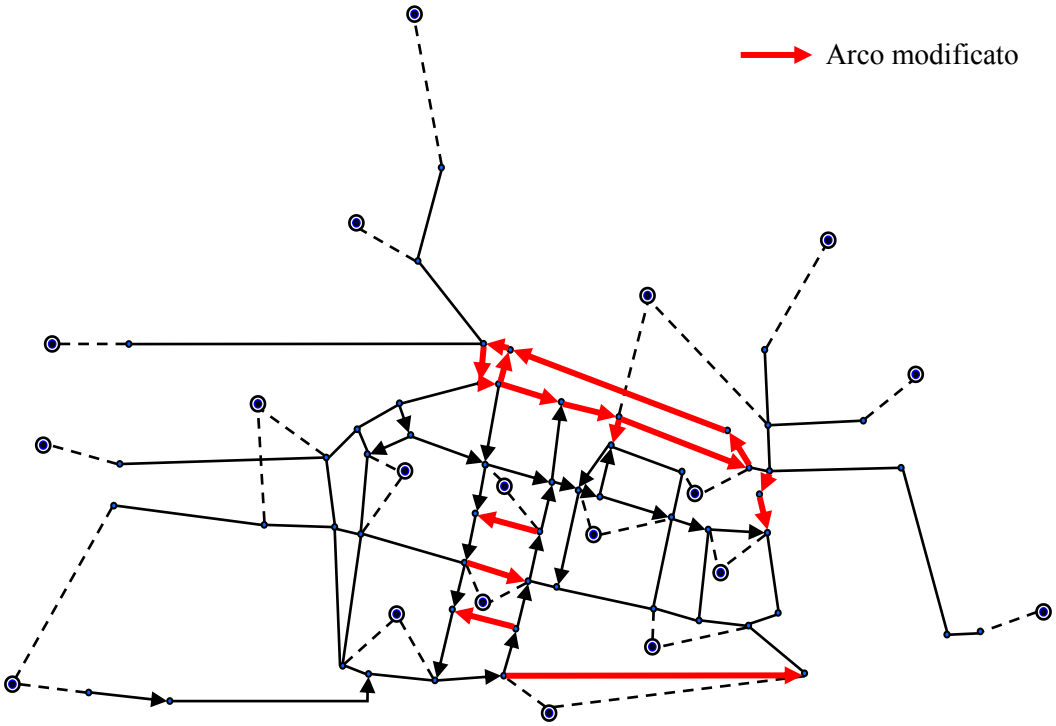



**Fig. 5.22 – Configurazione proposta 1P (Piano Urbano del Traffico)**

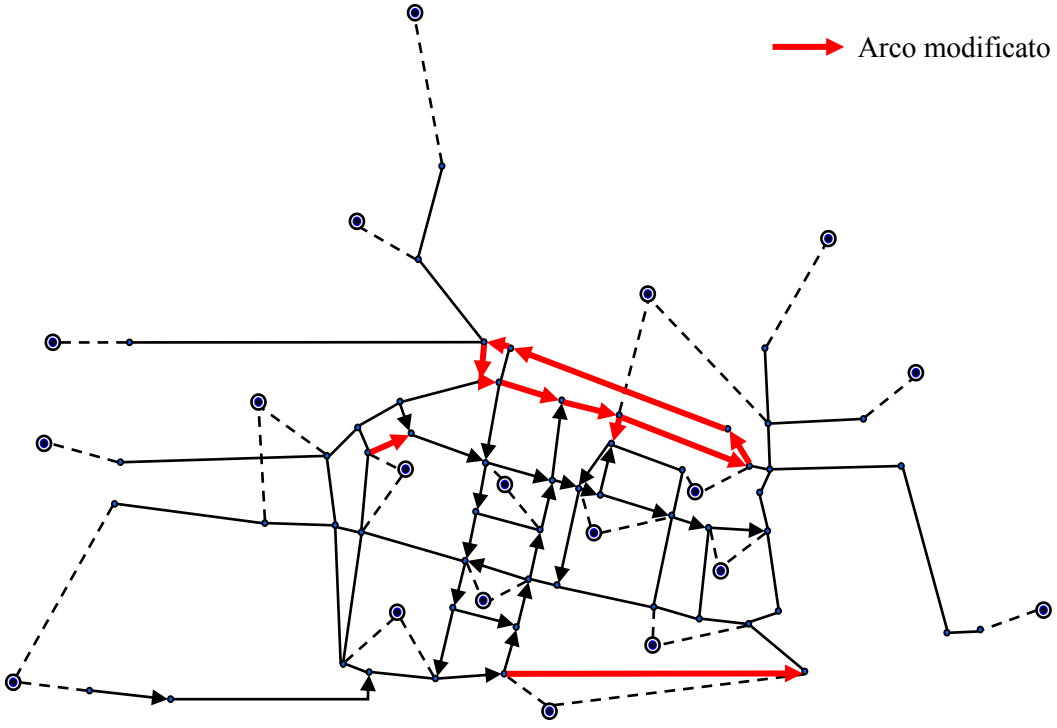



**Fig. 5.23 – Configurazione proposta 2P (Piano Urbano del Traffico)**

### 5.2.3.2. Confronto fra le soluzioni del Piano e quelle ottenute con i metodi proposti

Gli obiettivi del Piano Urbano del Traffico prevedono una serie di interventi che la funzione obiettivo considerata non è in grado di valutare, né facilmente può essere proposta una funzione obiettivo che riesca in questo intento.

Dal momento che per un corretto confronto è comunque necessario che i metodi proposti siano applicati tenendo conto degli obiettivi che il Piano prevede, si è scelto di riprodurre gli stessi interventi di riduzione della capacità stradale che sono stati apportati nella soluzione 2P proposta dal Piano. In tal modo si presuppone che gli obiettivi di favorire le utenze deboli e moderare la velocità del traffico veicolare in alcuni punti siano raggiunti in maniera equivalente.

Essendo questi obiettivi raggiunti in eguale misura, le soluzioni possono essere confrontate in termini di riduzione del tempo totale di viaggio, cioè secondo la funzione obiettivo proposta in questo studio.

Procedendo in tale maniera si sono ottenuti i risultati riportati nella Fig. 5.24, dove sono messi a confronto con la soluzione proposta dal Piano Urbano del Trafico (PUT). Si evince che, pur attuando gli interventi di riduzione delle carreggiate stradali previsti dal Piano, i metodi proposti riescono sempre a migliorare la funzione obiettivo rispetto alla stato di fatto. Lo scarto fra i miglioramenti ottenuti con il Tabu Search ed i Genetic Algorithms ed il peggioramento associato alla soluzione 2P proposta nel Piano è superiore al 10%.

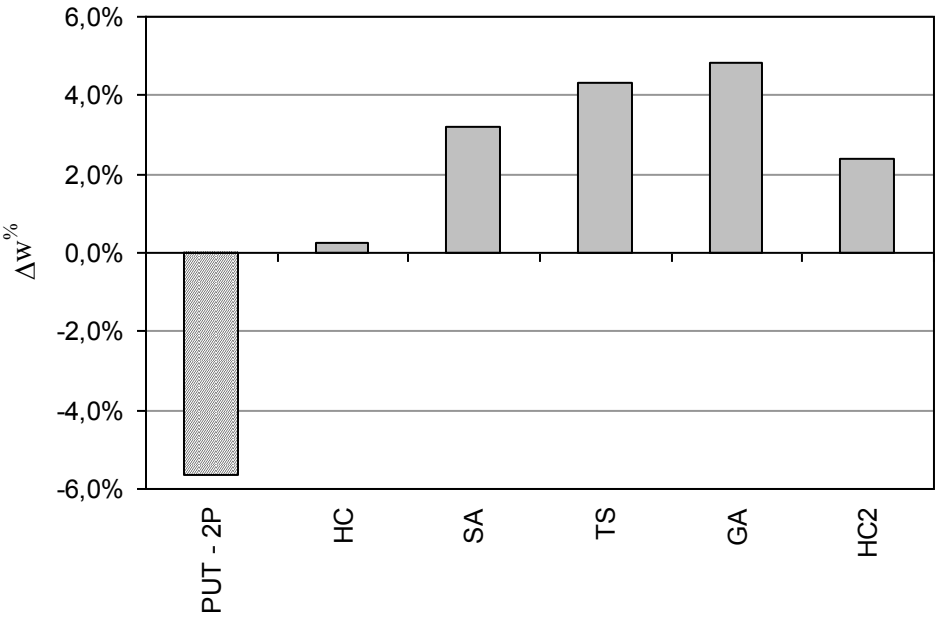



**Fig. 5.24 – Confronto fra la soluzione del Piano (PUT – 2P) e quelle ottenute con i metodi proposti**

Nella Fig. 5.25 è rappresentata una delle configurazioni individuate con i metodi proposti. È stato scelto di rappresentare tale soluzione perché presenta una discreta riduzione della funzione obiettivo ($\Delta w^{\%} = 2{,}1\%$) e poche sequenze modificate rispetto allo stato di fatto[14]. Confrontando questa soluzione con la configurazione 2P proposta dal Piano

[14] La presenza di un numero notevole di variazioni rispetto allo stato di fatto renderebbe non comprensibili le modifiche effettuate poiché la rete sarebbe completamente stravolta.

si nota che in entrambi i casi le sequenze 26, 27, 32 e 33, a doppio senso di marcia nello stato di fatto, vengono trasformate in un anello a senso unico. Tuttavia va osservato che il senso di marcia è diverso: nella configurazione proposta dal Piano i sensi di marcia vengono messi in modo coerente con la regola di marcia a destra dei veicoli evitando punti di conflitto; invece nella configurazione individuata dai metodi "what to" la disposizione dei sensi di marcia genera dei punti di conflitto nei nodi 41 e 47. Va inoltre osservato che la configurazione ottenuta con i metodi "what to" prevede un'alternanza fra i sensi unici delle direttrici orizzontali, mentre la configurazione proposta dal Piano prevede una prevalenza di sensi unici da sinistra verso destra.

In sintesi, da questa analisi risulta che i metodi proposti riescono a fornire buone soluzioni e dunque si candidano quale valido ed efficiente strumento di supporto alle decisioni per la pianificazione di un sistema di trasporto stradale urbano.

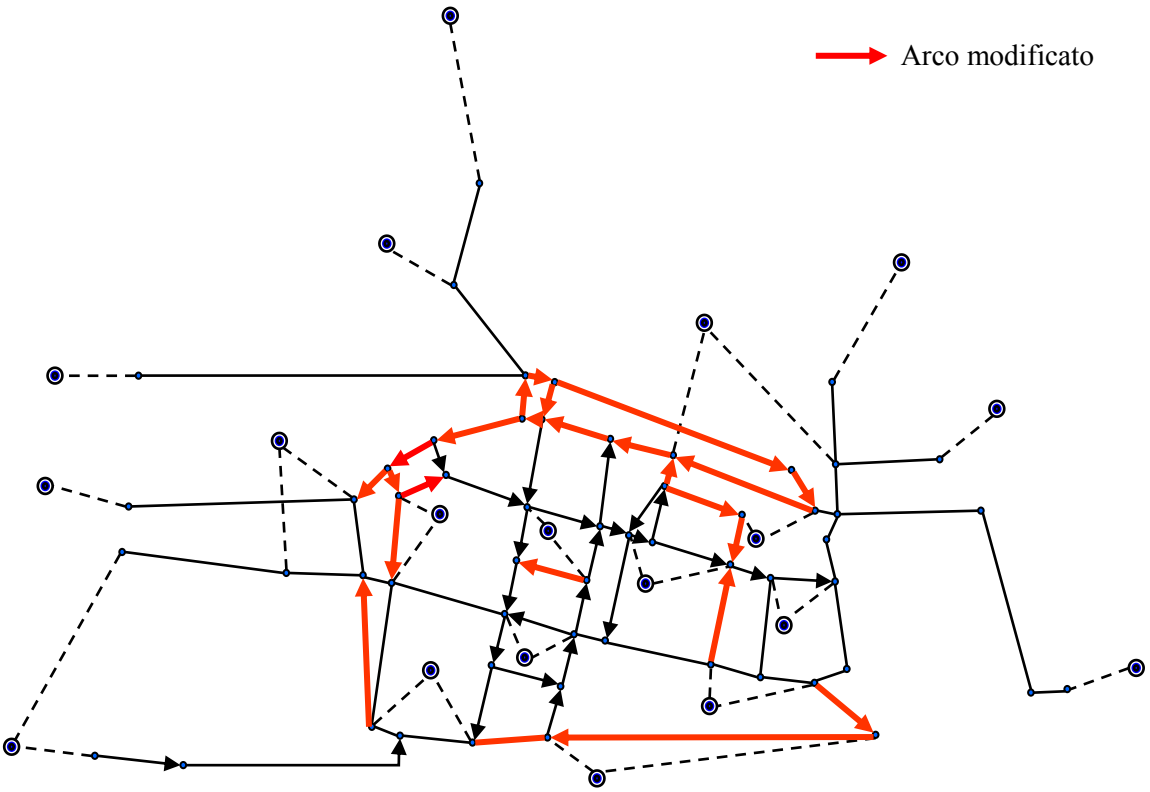



**Fig. 5.25 – Configurazione individuata con i metodi di progetto "what to" proposti**

# CAPITOLO 6
# Conclusioni

Questo studio ha trattato un argomento particolarmente rilevante ed attuale, quale è il problema del progetto dei sistemi di trasporto stradale urbano. Il controllo del traffico costituisce una sfida importante dal momento che i sistemi di trasporto stradale urbano negli ultimi decenni sono andati incontro a notevoli problemi dovuti all'incremento della domanda di trasporto che spesso non è stato adeguatamente bilanciato da un corrispondente aumento dell'offerta. Come conseguenza di ciò sono derivati effetti ambientali negativi e diseconomie produttive che hanno spesso messo in crisi il modello stesso di civiltà urbana.

In questo studio sono stati proposti alcuni modelli per il problema di progetto dei sistemi di trasporto stradale urbano che considerano come variabili decisionali la regolazione semaforica delle intersezioni oppure congiuntamente la topologia della rete e la regolazione semaforica. La descrizione di questi modelli è riportata nel capitolo 3.

Per i modelli presentati sono stati proposti alcuni algoritmi risolutivi euristici. Per il progetto della regolazione semaforica è stato proposto un algoritmo del gradiente proiettato che utilizza una direzione di ricerca approssimata calcolata analiticamente. Per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica sono stati proposti alcuni algoritmi che trattano separatamente i due tipi di variabili decisionali: la topologia della rete è ottimizzata sfruttando alcune metaeuristiche, mentre la regolazione semaforica è ottimizzata con l'algoritmo proposto o con altri metodi, assumendo la topologia fissata. La descrizione di questi algoritmi è riportata nel capitolo 4.

I metodi proposti nell'ambito di questo studio sono stati sperimentati applicandoli a sistemi di trasporto test e a sistemi reali. Ciò ha consentito di calibrare alcuni parametri che intervengono negli algoritmi proposti, di valutare l'efficienza dei metodi, di confrontarli fra loro e con gli approcci correntemente utilizzati nella pratica professionale, e infine di dedurre importanti considerazioni e regole pratiche. La descrizione di queste sperimentazioni è riportata nel capitolo 5.

I più importanti risultati di questo studio si configurano come un significativo avanzamento rispetto allo stato dell'arte e sono stati presentati a convegni nazionali ed internazionali e pubblicati sui relativi atti [23, 86, 109]. Alcuni di questi risultati sono stati accettati per la pubblicazione su riviste internazionali.

Una sintesi dei principali obiettivi raggiunti in questo lavoro è riportata nel paragrafo 6.1. Alcune possibili prospettive di sviluppo sono delineate nel paragrafo 6.2.

## 6.1. Obiettivi raggiunti

Gli obiettivi possono essere trattati separatamente per il progetto della regolazione semaforica e per il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica.

Per quanto riguarda il progetto della regolazione semaforica, l'algoritmo proposto si pone quale elemento innovativo all'interno dello stato dell'arte, in quanto esso utilizza una direzione di ricerca calcolata analiticamente che tiene in parte conto della risposta degli utenti alla variazione della regolazione semaforica. In letteratura sono invece state proposte direzioni di ricerca che non tengono affatto in conto la risposta degli utenti, oppure direzioni di ricerca calcolate numericamente che richiedono molte più risorse in termini di tempo di calcolo.

L'algoritmo proposto è stato sperimentato su reti test con poche variabili decisionali. I primi risultati sono positivi: l'algoritmo spesso converge verso una soluzione che è vicina all'ottimo globale. La convergenza verso punti lontani dall'ottimo è stata osservata solo quando i punti di partenza sono caratterizzati da tempi di verde molto piccoli rispetto al tempo di ciclo.

Per quanto riguarda il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica, per ottimizzare le variabili intere associate alla topologia sono state utilizzate varie metaeuristiche. Sono state specificate le seguenti metaeuristiche: Hill Climbing, Simulated Annealing, Tabu Search e Genetic Algorithms. Sono stati proposti due metodi ibridi: uno di essi combina il Tabu Search ed i Genetic Algorithms, mentre l'altro combina il Tabu Search ed il Path Relinking. Tutti questi metodi sono stati applicati con una definizione di intorno detta singola (l'intorno è costituito da tutte le configurazioni in cui varia al più una sequenza), e inoltre l'Hill Climbing è stato applicato anche con una definizione di intorno detta doppia (l'intorno è costituito da tutte le configurazioni in cui variano al più due sequenze).

Gli algoritmi sono stati applicati su due sistemi di trasporto reali al fine di calibrarne i parametri. Successivamente gli algoritmi sono stati applicati su un terzo sistema relativo alla città di Melito Porto Salvo (comune di circa 10˙000 abitanti in provincia di Reggio Calabria) con i parametri calibrati in precedenza. Tali sperimentazioni hanno consentito di valutare l'efficienza degli algoritmi proposti. Il Simulated Annealing e soprattutto il Tabu Search e i Genetic Algorithms hanno consentito di ottenere i migliori risulati in termini di riduzione del valore della funzione obiettivo. L'Hill Climbing presenta risultati di livello inferiore, ma si avvicina agli altri metodi quando viene applicato con l'intorno doppio. I metodi ibridi non hanno presentato vantaggi in termini di riduzione della funzione obiettivo e pertanto, considerata anche la loro maggiore complessità non sono stati approfonditi ulteriormente.

Ulteriori analisi sulle performances degli algoritmi hanno consentito di mettere in luce che l'Hill Climbing applicato con intorno singolo, il Tabu Search e i Genetic Algorithms consentono di ottenere rapidamente fin dalle prime iterazioni riduzioni consistenti del valore della funzione obiettivo, mentre il Simulated Annealing e l'Hill Climbing applicato con intorno doppio sono caratterizzati da una discesa molto più lenta del valore della funzione obiettivo. È stato inoltre verificato che le soluzioni migliori fornite dagli algoritmi sono quasi sempre associate a variazioni di più della metà delle sequenze in progetto.

Quando solo poche sequenze sono modificate, l'Hill Climbing applicato con intorno doppio consente di ottenere le migliori riduzioni del valore della funzione obiettivo.

Le sperimentazioni sul sistema di trasporto di Melito Porto Salvo sono state ulteriormente approfondite, effettuando un confronto con le configurazioni proposte da un Piano Urbano del Traffico redatto dal C.I.Su.T. nel rispetto delle migliori pratiche professionali correnti. I metodi proposti sono stati applicati tenendo conto degli obiettivi del Piano che prevede alcuni interventi di riduzione della capacità stradale per agevolare le utenze deboli e per moderare la velocità del traffico veicolare in alcuni punti. I risultati ottenuti sono stati confrontati in termini di indicatori ed in termini topologici con le configurazioni proposte nel Piano. Da questa analisi risulta che i metodi proposti riescono a fornire soluzioni migliori e dunque si candidano quale valido ed efficiente strumento di supporto alle decisioni per la pianificazione di un sistema di trasporto stradale urbano.

Questo risultato deve esere considerato il più importante fra quelli ottenuti nell'ambito di questo studio, poiché la filosofia di fondo è stata quella di proporre metodi che siano direttamente ed efficacemente applicabili in un tipico contesto urbano. Al contrario in letteratura spesso si osserva che l'applicabilità pratica è spesso sacrificata ed i modelli e gli algoritmi proposti non sono molto di più che eleganti strumenti matematici.

## 6.2. Sviluppi

Benché molti risultati siano stati raggiunti con questo studio mettendo alcuni punti fermi su diversi aspetti, non secondari sono stati gli interrogativi e le prospettive di sviluppo che esso ha aperto.

Per quanto riguarda il progetto della regolazione semaforica, l'algoritmo proposto richiede ulteriori evoluzioni prima di potere essere applicato efficientemente. Il più importante aspetto che deve essere approfondito è l'individuazione di una valida procedura di ricerca lineare. Inoltre l'algoritmo deve essere confrontato con altri algoritmi proposti in letteratura, comparandone sia la qualità dei risultati ottenuti sia il tempo di calcolo richiesto. Infine è necessario sperimentare l'algoritmo su reti reali.

Per quanto riguarda il progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica, nella fase di ottimizzazione delle variabili associate alla topologia, è possibile rendere più efficienti gli algoritmi proposti specificando le metaeuristiche in maniera più articolata. È inoltre ovviamente possibile considerare ulteriori metaeuristiche (o loro combinazioni). Comunque tre sembrano essere gli sviluppi più interessanti:

- l'uso dell'intorno doppio anche per altri algoritmi oltre all'Hill Climbing e la definizione e sperimentazione dell'intorno intermedio;
- l'uso di parametri adattivi, che invece di dover essere calibrati si perfezionano progressivamente durante le iterazioni;
- l'uso di metodi per una valutazione più veloce sebbene più approssimata della funzione obiettivo (algoritmi di equilibrio arrestati prematuramente, reti neurali, etc.) con lo scopo di eseguire una rapida esplorazione dell'intorno della soluzione corrente e poi selezionare un sottoinsieme di soluzioni "buone" sulle quali effettuare calcoli più accurati della funzione obiettivo in maniera tradizionale.

Altri metodi possono essere utilizzati per rendere più veloci gli algoritmi proposti, quali ad esempio l'utilizzo del calcolo parallelo o la sperimentazione di tecniche di riottimizzazione dei minimi percorsi.

Lo sviluppo probabilmente più interessante di tutto il lavoro svolto sarebbe la riproduzione delle configurazioni proposte su sistemi di trasporto reali e la conseguente analisi dei risultati ottenuti.

# APPENDICE A
# Algoritmi per l'ottimizzazione combinatoria

In questa appendice, per comodità del lettore, sono sintetizzati alcuni argomenti di ricerca operativa utili per la comprensione di alcuni degli algoritmi proposti nel capitolo 4.

Dalla lettura di questa appendice dovrebbe risultare evidente, qualora già non lo fosse, l'impossibità di utilizzare algoritmi esatti per affrontare il problema di ottimizzazione combinatoria costituito dal progetto della topologia della rete. Ciò è spiegato illustrandone i motivi teorici e riportando alcuni esempi.

Una rilevante parte di questa appendice è rivolta alla descrizione delle metaeuristiche. Tali metodi sono riconosciuti dalla comunità scientifica come uno dei più efficienti approcci per la risoluzione di problemi di ottimizzazione combinatoria. Sebbene il loro campo d'applicazione è essenzialmente proprio quello dell'ottimizzazione combinatoria, esistono anche alcuni validi esempi di applicazioni nel campo dell'ottimizzazione con variabili continue o miste.

Nel paragrafo A.1 è introdotto il concetto di complessità computazionale, con particolare riferimento ai problemi di ottimizzazione combinatoria, ed è evidenziata l'impossibilità paratica di utilizzare algoritmi esatti per risolvere alcuni tipi di problemi. Nel paragrafo A.2 sono brevemente introdotti gli algoritmi esatti. Nel paragrafo A.3 sono trattate le caratteristiche generali dei metodi metaeuristici e sono sinteticamente descritte alcune delle più note metaeuristiche.

Il contenuto di questa appendice è indipendente dal resto della trattazione. In particolare la notazione è diversa da quella utilizzata nei restanti capitoli e non è riportata nell'apposita sezione posta alla fine del volume.

# A.1. Complessità computazionale e problemi combinatori

La complessità computazionale di un dato problema è una misura della "difficoltà" di risoluzione del problema stesso che dipende dall'entità delle risorse impegnate: memoria occupata (complessità spaziale) e tempo di calcolo (complessità temporale). Nel seguito si terrà conto esclusivamente del tempo di calcolo, essendo molto spesso questa la risorsa più critica. Ipotizzando che il tempo di calcolo sia associato all'esecuzione di certo numero di operazioni elementari, si può assumere il numero di tali operazioni come misura della complessità, col vantaggio di rendere tale misura indipendente dalla velocità di esecuzione del calcolatore utilizzato. Per definire le operazioni elementari è necessario riferirsi ad un modello computazionale, ad esempio la *Macchina di Turing*[1] o la *Random Access Machine* (*R.A.M.*)[2]. In entrambi casi si tratta di macchine sequenziali (cioè che eseguono una singola istruzione alla volta, senza alcun tipo di parallelismo) e deterministiche (cioè il cui stato futuro ad un certo istante è predicibile essendo noto lo stato attuale). Nel seguito sarà sottinteso che si fa sempre riferimento a macchine sequenziali e deterministiche.

Formulato un problema A, si definisce *algoritmo esatto* per la soluzione di A, una procedura costituita da una sequenza finita di istruzioni che applicata ad una qualsiasi istanza ã di A, si arresta dopo un numero finito di passi (operazioni elementari), fornendo una soluzione di ã oppure indicando che ã non ha soluzioni ammissibili.

Ci si chiede in quanto tempo, o meglio dopo quante operazioni elementari, l'algoritmo termina la propria esecuzione. Non è opportuno, e talvolta non è neanche possibile, dare una risposta per ogni istanza del problema. Più semplicemente si richiede di conoscere qual è il numero di operazioni necessario per risolvere la più difficile tra le istanze di una certa dimensione, e si parla in tal caso di *complessità nel caso peggiore.* Per *dimensione di un'istanza* si intende la quantità di memoria richiesta (che può ad esempio essere misurata in bit) per la memorizzazione dei suoi dati di input in maniera ragionevolmente compatta.

Tuttavia va considerato un limite di questo approccio: in molti casi non è corretto considerare solo il caso peggiore per valutare l'efficienza di un algoritmo. Oltre che analizzare la complessità computazionale nel caso peggiore, in alcuni casi è opportuno effettuare un'analisi probabilistica della complessità dell'algoritmo, giungendo almeno alla definizione di una *complessità nel caso medio*. Tale analisi si rende necessaria sia quando l'algoritmo è di tipo probabilistico, sia quando la sua efficienza varia sensibilmente al variare dell'istanza (anche a parità di dimensione) [1].

[1] La Macchina di Turing [107] è uno strumento di calcolo ideale costituito da: un unità di controllo e calcolo che può evolvere attraverso un numero di stati finiti e da un nastro, potenzialmente infinito, diviso in maniera discreta in celle che possono contenere simboli. In un passo una Macchina di Turing può: leggere il simbolo scritto in una cella; sosvrascrivere il simbolo scritto in una cella; far scorrere il nastro, cella dopo cella, verso destra o verso sinistra.

[2] Una R.A.M. consiste di: un insieme finito di istruzioni (programma); un insieme finito di registri ciascuno dei quali può contenere un singolo numero (intero o razionale); una memoria di n parole ciascuna delle quali ha un indirizzo univoco (tra 1 ed n) e può contenere un singolo numero. In un passo una R.A.M. può: effettuare una singola operazione aritmetica o logica sul contenuto di alcuni registri ed immagazzinare il risultato in un registro; copiare in un registro il contenuto di una specificata parola della memoria; immagazzinare il contenuto di un registro in una specificata parola della memoria.

## A.1.1. Complessità asintotica

La complessità nel caso peggiore può essere espressa come una funzione $g$ della dimensione dell'istanza n. Tale funzione $g(n)$, benché sia da un punto di vista teorico definita in modo sufficientemente rigoroso, essa è in pratica difficilmente utilizzabile come misura della complessità, dato che risulta difficile la valutazione di $g(n)$ per ogni n. Pertanto si ricorre a valutare il comportamento asintotico di $g(n)$ nei confronti di una più semplice funzione $f(n)$. A tale scopo sono state introdotte da Knuth nel 1976 [68] tre *notazioni asintotiche*:

$$g(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow \exists\, c, n_0 > 0 \mid \forall\, n > n_0,\ 0 \le g(n) \le c \cdot f(n) \tag{A.1}$$

$$g(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow \exists\, c, n_0 > 0 \mid \forall\, n > n_0,\ g(n) \ge c \cdot f(n) \ge 0 \tag{A.2}$$

$$g(n) \in \Theta(f(n)) \Leftrightarrow \exists\, c_1, c_2, n_0 > 0 \mid \forall\, n > n_0,\ 0 \le c_1 f(n) \le g(n) \le c_2 f(n) \tag{A.3}$$

È immediato dimostrare che il contemporaneo verificarsi delle condizioni (A.1) e (A.2) è equivalente al verificarsi della condizione (A.3)

$$g(n) \in O(f(n)) \ \wedge\ g(n) \in \Omega(f(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Theta(f(n))$$

Per mezzo di queste notazioni è possibile valutare e confrontare agevolmente l'ordine di grandezza della complessità computazionale asintotica nel caso peggiore. Le stesse notazioni possono essere utilizzate con riferimento alla complessità computazionale nel caso migliore o nel caso medio.

Tale concetto può essere esteso alla complessità computazionale asintotica di un algoritmo, dove con tale termine si intende una mappa uno a molti che ad ogni valore della dimensione dell'istanza n associa l'insieme di tutti i possibili valori di complessità computazionale che si possono ottenere al variare delle istanze di dimensione n. È evidente che tali valori sono compresi fra la complessità computazionale asintotica nel caso migliore e nel caso peggiore. Se si verifica che la complessità computazionale asintotica nel caso peggiore è $O(f(n))$, più in breve si può dire che la complessità asintotica dell'algoritmo è $O(f(n))$. Se invece la complessità computazionale asintotica nel caso migliore è $\Omega(f(n))$, si può dire che la complessità asintotica dell'algoritmo è $\Omega(f(n))$. Se sono si verificano entrambe queste condizioni allora si può dire che la complessità asintotica dell'algoritmo è $\Theta(f(n))$.

Un'importante considerazione riguarda i casi in cui non ci si attiene ad un'analisi di tipo asintotico, che è alla base delle ipotesi utilizzate nell'introduzione delle notazioni (A.1), (A.2) e (A.3). Infatti, proprio per il carattere asintotico delle notazioni introdotte, vengono trascurati i termini di ordine inferiore e le costanti moltiplicative, che tuttavia giocano un ruolo fondamentale tanto più è simile l'ordine di grandezza della complessità computazionale e tanto più è piccola la dimensione dell'istanza del problema.

## A.1.2. Problemi trattabili ed intrattabili

I problemi per i quali esistono algoritmi risolutivi la cui complessità computazione è $O(p(n))$, con $p(n)$ polinomio di grado qualsiasi in n, vengono usualmente detti *trattabili*,

mentre i problemi per i quali non esistono algoritmi di tale tipo sono detti *intrattabili*. Il motivo di tale distinzione risulta evidente se si osserva l'andamento dei tempi di calcolo al variare della dimensione dell'istanza, a parità di potenza di calcolo, riportato nella Tab. A.1.

La notevole crescita della capacità di calcolo dei computer sembra poter agevolare enormemente qualsiasi problema di calcolo. Secondo una legge empirica enunciata per la prima volta da Moore, cofondatore di Intel®, nel 1965 [75] il numero di componenti elettronici per unità di superficie nei calcolatori cresce esponenzialmente, e con esso la potenza di calcolo. L'ipotesi originaria di Moore delinea un tempo di raddoppio della densità di componenti pari a 12 mesi, mentre attualmente il tempo di raddoppio è pari a circa 18÷24 mesi e secondo alcune previsioni dovrebbe mantenersi su livelli simili per altri 10÷15 anni. Tuttavia neanche la crescita esponenziale della potenza di calcolo dei computer è in grado di fornire una risposta efficiente per la soluzione dei cosiddetti problemi intrattabili, come si può evincere dalla Tab. A.2, dove è riportata la massima dimensione dell'istanza calcolabile al variare della potenza di calcolo, a parità di tempo di calcolo.

**Tab. A.1 – Tempi di calcolo al variare della dimensione dell'istanza (a parità di potenza di calcolo)**

| $f$(n) | Dimensione dell'istanza | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 |
| n | $x_1$ | $4\ x_1$ | $16\ x_1$ | $64\ x_1$ | $256\ x_1$ |
| $n^2$ | $x_2$ | $16\ x_2$ | $256\ x_2$ | $4.096\ x_2$ | $65.536\ x_2$ |
| $2^n$ | $x_3$ | $16\ x_3$ | $65.536\ x_3$ | $1{,}8\cdot10^{19}\ x_3$ | $1{,}2\cdot10^{77}\ x_3$ |
| $4^n$ | $x_4$ | $256\ x_4$ | $4{,}3\cdot10^{9}\ x_4$ | $3{,}4\cdot10^{38}\ x_4$ | $1{,}3\cdot10^{154}\ x_4$ |

**Tab. A.2 – Massima dimensione dell'istanza calcolabile al variare della potenza di calcolo (a parità di tempo di calcolo)**

| $f$(n) | Potenza di calcolo | | | |
|---|---|---|---|---|
| | c (attuale) | 16 c (fra 6 anni)[3] | 256 c (fra 12 anni) | 4.096 c (fra 18 anni) |
| n | $x_1$ | $16\ x_1$ | $256\ x_1$ | $4.096\ x_1$ |
| $n^2$ | $x_2$ | $4\ x_2$ | $16\ x_2$ | $64\ x_2$ |
| $2^n$ | $x_3$ | $x_3 + 4$ | $x_3 + 8$ | $x_3 + 12$ |
| $4^n$ | $x_4$ | $x_4 + 2$ | $x_4 + 4$ | $x_4 + 6$ |

Con riferimento ai problemi di decisione, nei quali bisogna decidere se esiste o meno una soluzione con certe caratteristiche, è possibile individuare alcune *classi di complessità*, fra le quali [54]:

- classe *P*, che contiene quei problemi che possono essere risolti in un tempo polinomiale;
- classe *NP*, che contiene quei problemi per i quali è possibile risolvere il problema di certificato associato (cioè verificare se una data soluzione possiede le caratteristiche richieste) in tempo polinomiale;

[3] La previsione temporale è basata sull'ipotesi del raddoppio della velocità di calcolo dei processori ogni 18 mesi.

- classe *NP-hard*, che contiene quei problemi ai quali qualsiasi problema della classe *NP* può essere ricondotto con un metodo di complessità polinomiale;
- classe *NP-complete*, che contiene quei problemi che sono contemporaneamente *NP-hard* ed *NP*.

Dalle definizioni si deduce che la classe P è inclusa nella classe NP

$$P \subseteq NP$$

ed in particolare si ritiene, anche se ciò non è stato mai dimostrato, che l'inclusione sia di tipo stretto

$$P \subset NP \tag{A.4}$$

Pertanto si ritiene che nessun problema decisionale *NP-hard* possa avere un algoritmo risolutivo polinomiale, poiché in tal caso tutti i problemi di classe *NP* si potrebbero risolvere in un tempo polinomiale

$$P = NP$$

e ciò sarebbe in contraddizione con la (A.4). La classe *NP-complete* include in un certo senso i più generali e difficili fra i problemi *NP*, in quanto ad essi può essere ricondotto in tempo polinomiale qualsiasi problema *NP*. È stato dimostrato che la classe *NP-complete* è non vuota [35]. Nella Fig. A.1 sono illustrate per mezzo di un diagramma di Venn le relazioni di inclusione fra le classi di complessità sopra introdotte.

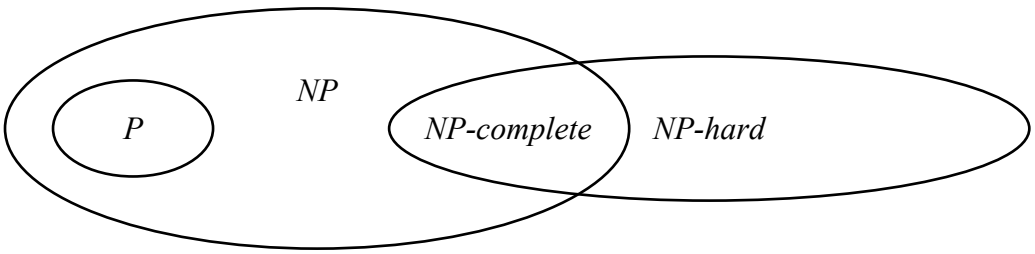



**Fig. A.1 – Diagramma di Venn delle classi di complessità computazionale (ipotesi $P \subset NP$)**

## A.2. Algoritmi esatti

La tecnica più semplice concettualmente per individuare la soluzione ottima di un problema di ottimizzazione combinatoria è quella di enumerare tutte le soluzioni e calcolarne il valore della funzione obiettivo o verificarne l'inammissibilità. Tale modo di procedere, detto *enumerazione esplicita* (EE) o anche approccio a forza bruta, è notevolmente dispendioso in termini di tempo di calcolo. Infatti se si considera un problema per il quale una generica soluzione è codificata mediante una sequenza di n numeri (o, più in generale, simboli) che possono assumere k valori distinti esistono $k^n$ possibili soluzioni che devono essere analizzate. Quindi, in termini di complessità asintotica

$$EE \in \Theta(k^n)$$

Invece dei metodi di enumerazione esplicita si può ricorrere alle cosiddette tecniche di *enumerazione implicita* (IE), che consentono di visitare implicitamente alcuni insiemi di soluzioni. Se, fissata una parte delle variabili che costituiscono la sequenza che codifica una generica soluzione, è possibile stabilire che, qualunque valore assumono le altre variabili, le soluzioni trovate sono inammissibili oppure hanno un valore di funzione obiettivo che è sicuramente peggiore del migliore valore ottenuto fino al momento, allora è possibile non analizzare (o meglio "analizzare implicitamente") tutte le soluzioni che hanno in comune la parte di sequenza fissata. In questi tipi di algoritmo è rilevante l'ordine col quale vengono esplorate le soluzioni. Per questi metodi comunque non si può escludere l'eventualità di dovere esaminare tutti i nodi dell'albero delle decisioni, o comunque una frazione consistente di essi. Quindi in termini di complessità asintotica

$$IE \in O(k^n)$$

Sfortunatamente per una buona parte dei problemi di ottimizzazione combinatoria non si conoscono algoritmi esatti diversi dall'enumerazione esplicita o implicita. Quindi tali problemi sono intrattabili (nel senso attribuito a questo termine nel paragrafo A.1.2).

## A.3. Metaeuristiche

Un *algoritmo euristico* può essere definito come un algoritmo che non è esatto, cioè che non garantisce l'individuazione della soluzione di un problema oppure, nel caso in cui il problema non avesse una soluzione ammissibile, non garantisce ciò sia accertato.

Gli algoritmi euristici si possono classificare in due grandi classi:

- le *euristiche dedicate*, cioè algoritmi appositamente pensati per la soluzione di un particolare problema;
- le *metaeuristiche*, cioè metodi in grado di risolvere una vasta gamma di problemi.

Nel seguito l'attenzione sarà posta sulla seconda classe, poiché è evidente che è impossibile descrivere in generale le euristiche dedicate prescindendo da un particolare problema da risolvere.

Non è semplice definire il concetto di metaeuristica, e spesso in letteratura sono date definizioni alquanto differenti, poiché non esiste una definizione universalmente accettata. Qui, attenendosi alla classificazione sopra proposta, con tale termine sarà inteso un metodo di ottimizzazione euristico di generale applicabilità per i problemi combinatori, cioè alquanto facilmente specificabile per una vasta serie di problemi combinatori. Deve essere tenuto presente che una metaeuristica non è un algoritmo nel senso rigoroso del termine, ma piuttosto è una metodologia, o più in generale una filosofia risolutiva che di volta in volta deve essere specificata, adattandola al problema da risolvere. Solo dopo questa specificazione si ottiene un algoritmo nel senso proprio del termine.

L'area di ricerca relativa ai metodi metaeuristici è molto vasta e coinvolge i settori dell'informatica, della ricerca operativa e dell'intelligenza artificiale. Essa è in continua evoluzione ed ha avuto una diffusione ed un successo sempre maggiore. I più famosi metodi euristici, quali ad esempio i Genetic Algorithms, il Tabu Search, il Simulated Annealing[4], sono stati trattati da libri e centinaia di articoli scientifici, sono oggetto di studio di alcuni centri di ricerca dedicati e sono stati applicati con successo per la risoluzione di molti problemi di ottimizzazione.

La storia dei metodi metaeuristici è relativamente recente poiché essa ha avuto origine negli anni Settanta, durante i quali sono stati pubblicati i primi libri ed articoli sull'argomento. La data di nascita di questo settore di studi si può far risalire al 1975, anno in cui John H. Holland pubblicò il libro "*Adaptation in Natural and Artificial System*" [60], ancora oggi riconosciuto come la Bibbia dei Genetic Algorithms. Negli anni Ottanta sono nate e si sono consolidate alcune metaeuristiche che oggi ormai vengono considerate tradizionali: il Simulated Annealing ed il Tabu Search. È in questi anni che il termine "metaeuristica" viene coniato da Fred Glover [57], il padre del Tabu Search. Dagli anni Novanta in poi gli studi sull'argomento hanno conosciuto una crescita vertiginosa: si è

[4] Nella letteratura scientifica in lingua italiana i nomi dei metodi metaeuristici sono in alcuni casi quasi sempre tradotti (Algoritmi Genetici), in altri quasi sempre riportati in lingua inglese (Simulated Annealing). Poiché il secondo approccio è più frequente, ed in taluni casi esclusivamente utilizzato, verrà seguito consistentemente in tutta la trattazione. L'articolo utilizzato è quello riscontrato con più frequenza in letteratura, anche se talvolta il suo genere non concorda col genere associato al nome della metaeuristica (ad esempio: *il* Tabu Search).

verificato un proliferare di nuovi metodi, alcuni dei quali originali, altri che sviluppano, integrano e combinano metodi già esistenti. L'ampia diffusione dei metodi metaeuristici è dovuta ad innegabili meriti; tuttavia, almeno in una prima fase, la loro diffusione è stata facilitata dall'affascinante analogia che esiste fra alcuni di essi ed i processi naturali.

Nel paragrafo A.3.1 sono descritte alcune caratteristiche e proprietà generali delle metaeuristiche, mentre nel paragrafo A.3.2 sono brevemente descritte alcune di esse.

## A.3.1. Aspetti generali e classificazione delle metaeuristiche

Le metaeuristiche si basano sull'esplorazione delle possibili soluzioni del problema combinatorio di cui ci si propone la soluzione. L'insieme delle soluzioni, detto *spazio di ricerca*, può essere pensato come un grafo orientato i cui nodi corrispondo a diverse soluzioni e gli archi a *mosse*, cioè a modi di passare da una soluzione all'altra durante l'esplorazione. Tutte le soluzioni che possono essere raggiunte da una soluzione con al più una mossa, costituiscono un *intorno* della soluzione data[5].

Dal momento che le dimensioni dello spazio di ricerca crescono notevolmente al crescere della dimensione del problema combinatorio trattato, è necessario effettuare un esplorazione mirata di un numero contenuto di soluzioni. Pertanto le metaeuristiche si basano sull'esigenza di bilanciare di esigenze contrapposte:

- l'*intensificazione*, cioè l'esplorazione più approfondita delle migliori regioni dello spazio di ricerca;
- la *diversificazione*, cioè l'esplorazione di regioni dello spazio non esplorate in precedenza.

Qualora dovesse prevalere l'intensificazione, poche soluzioni sarebbero ripetutamente esplorate, mentre se dovesse prevalere la diversificazione si tenderebbe verso una ricerca casuale nello spazio di ricerca. Pertanto la necessità di bilanciare queste due contrapposte esigenze è evidente.

Le metaeuristiche possono essere classificati secondo la strategia di ricerca:

- metodi *neighborhood based*, nei quali l'esplorazione dello spazio di ricerca avviene partendo da una soluzione iniziale e seguendo un percorso, cioè una successione di mosse adiacenti (ad ogni iterazione la soluzione corrente è sostituita da una soluzione contenuta nel suo intorno);
- metodi *population based*, nei quali si considera un insieme di soluzioni che ad ogni iterazione viene aggiornato tenendo conto di nuove soluzioni generate sia modificando localmente le soluzioni (cioè sostituendo una soluzione con una soluzione contenuta nel suo intorno), sia combinandole fra loro secondo qualche regola.

Le metaeuristiche possono essere classificati anche in funzione di come esse sfruttano le informazioni acquisite durante la ricerca:

- metodi *con memoria*, nei quali l'evoluzione della ricerca dipende dalle soluzioni esplorate precedentemente;

[5] L'intorno secondo questa definizione include la soluzione data, che non necessita di alcuna mossa per essere raggiunta.

- metodi *senza memoria* (anche detti *markoviani*), nei quali l'evoluzione dell'algoritmo dipende solo dalla soluzione corrente (o dall'insieme corrente delle soluzioni).

Un ulteriore criterio si classificazione suddivide le metaeuristiche in:

- metodi *deterministici*, se l'evoluzione dell'algoritmo è completamente predicibile dato lo stato attuale;
- metodi *stocastici*, se l'algoritmo evolve stocasticamente verso uno dei differenti stati possibili dato lo stato attuale.

## A.3.2. Descrizione di alcune metaeuristiche

Nel seguito sono brevemente descritte alcune delle più note metaeuristiche. Per approfondire l'argomento, oltre ai riferimenti bibliografici specifici riportati in seguito, è possibile riferirsi ad alcuni libri ed articoli [2, 87, 115].

### A.3.2.1. Hill Climbing

L'Hill Climbing [116] è una metaeuristica neighborhood based, senza memoria, che è deterministica nella sua versione di base. Tale metodo non è universalmente riconosciuto come metaeuristica, almeno nella sua versione base, poiché non è regolato da alcuna strategia di diversificazione.

È impossibile risalire all'origine di questo metodo, poiché per la semplicità dell'idea che sta alla base, è stato proposto indipendentemente da più autori.

In questo metodo, partendo da una soluzione iniziale, ad ogni iterazione viene selezionata la migliore soluzione appartenente all'intorno della soluzione corrente. L'algoritmo si arresta quando non è più possibile migliorare il valore della soluzione corrente, cioè quando è stato raggiunto un minimo locale.

Differenti varianti stocastiche di questo metodo sono state proposte, nel tentativo di dotarlo di una strategia di diversificazione. Ad esempio il metodo può essere applicato partendo da più soluzioni iniziali generate casualmente, oppure la struttura dell'intorno può essere variata durante le iterazioni.

### A.3.2.2. Simulated Annealing

Il Simulated Annealing [15] è una metaeuristica neighborhood based, senza memoria, stocastica.

Il metodo del Simulated Annealing è stato proposto come tecnica di ottimizzazione da Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi nel 1983 [66], e da Cerny nel 1985 [31] che ha lavorato in modo indipendente.

L'idea del Simulated Annealing (Ricottura Simulata) come metodo di ottimizzazione proviene da un'analogia riguardante la termodinamica e la metallurgia: la ricottura è un processo nel quale un solido è riscaldato fino a fusione, ed in seguito è raffreddato fino a quando cristallizza in un reticolo perfetto. Durante questo processo il livello di energia del solido decresce gradualmente, fino a quando il cristallo si ritrova in uno stato di minima energia; il lento raffreddamento è essenziale. Sebbene il solido tenti di trasformarsi in stati con minore livello di energia, c'è una piccola probabilità che esso incrementi la sua energia. Questa probabilità dipende dalla *temperatura* e dalla variazione del livello energetico associata alla trasformazione fra due stati, ed è regolata dal *criterio di*

*Metropolis*: tanto più alta è la temperatura e tanto più basso è il salto energetico, tanto più probabile è la trasformazione. L'analogia fra il processo fisico ed il metodo di ottimizzazione si basa sulle seguenti corrispondenze: agli stati del sistema fisico corrispondono le soluzioni del problema; alla posizione delle particelle corrisponde il valore delle variabili decisionali; al livello energetico corrispondente ad un certo stato è associato il valore della funzione obiettivo associata ad una certa soluzione; alla temperatura del sistema è associato un parametro di controllo che è comunemente indicato con lo stesso nome.

In questo metodo ad ogni iterazione viene selezionata casualmente (qui e nel seguito "casualmente" sarà inteso equivalente all'espressione: "con probabilità uniformemente distribuita") una soluzione appartenente all'intorno della soluzione corrente, e se tale soluzione soddisfa il criterio di Metropolis diviene la nuova soluzione corrente. La temperatura viene raffreddata secondo una qualche regola dopo un fase (*plateau*) nella quale viene eseguito un numero prefissato di iterazioni.

Alcune varianti prevedono che il numero di iterazioni in ogni plateau non sia prefissato ma dipenda dall'evoluzione dell'algoritmo, oppure che in certi casi la temperatura possa essere incrementata.

### A.3.2.3. Tabu Search

Il Tabu Search [58] è una metaeuristica neighborhood based, senza memoria, che è deterministica nella sua versione di base.

Questa metaeuristica è stata proposto da Fred Glover, e le prime idee che stanno alla base di essa risalgono alla metà degli anni Ottanta [57].

Il Tabu Search è un metodo che si basa sul mantenimento di una memoria delle ultime mosse effettuate al fine di evitare di ritornare ad esplorare regioni dello spazio di ricerca già esplorate in precedenza.

In questo metodo ad ogni iterazione viene selezionata la migliore soluzione appartenente all'intorno della soluzione corrente che non sia ottenuta effettuando una mossa contenuta nella *tabu list*, che è una lista che contiene un insieme di mosse vietate, generalmente costituita dalle mosse che sono le inverse di quelle effettuate nelle ultime iterazioni. I divieti imposti dalla tabu list possono essere violati solo se la soluzione considerata soddisfa un prescelto criterio, detto *criterio di aspirazione*, che usualmente prevede come condizione che la soluzione considerata abbia un valore di funzione obiettivo migliore della migliore soluzione trovata fino al momento. Ad ogni iterazione è necessario aggiornare la tabu list, e ciò è usualmente effettuato seguendo una strategia FIFO: entra la mossa che costituisce l'inversa dell'ultima mossa effettuata ed esce la mossa che permane da più tempo nella lista.

Alcune varianti di questa versione di base, detta "con memoria a breve termine", prevedono ad esempio di considerare la frequenza con cui un certo tipo di soluzioni sono state analizzate. Altre varianti introducono elementi aleatori.

### A.3.2.4. Genetic Algorithms

I Genetic Algorithms [59, 74] sono una metaeuristica population based, senza memoria, stocastica.

L'origine degli algoritmi genetici si può fare risalire al 1975, anno in cui Holland pubblicò "*Adaptation in Natural and Artificial System*" [60], ancora oggi riconosciuto come la Bibbia dei Genetic Algorithms. Fra le tecniche euristiche moderne nell'ambito

dell'intelligenza artificiale solo le reti neurali hanno avuto una diffusione maggiore dei Genetic Algorithms.

L'idea dei Genetic Algorithms quale metodo di ottimizzazione nasce da un'analogia riguardante il processo naturale di evoluzione delle specie. Attraverso gli accoppiamenti fra individui di sesso diverso si verifica la continua combinazione di materiale genetico raggruppato nei *cromosomi*; da questo processo vengono generati alcuni individui con caratteristiche migliori, altre con caratteristiche peggiori rispetto a quelle dei genitori. La selezione naturale consente la sopravvivenza solo agli individui migliori che si adattano meglio all'ambiente, e che quindi possono diffondere le proprie caratteristiche genetiche alle generazioni successive. Alcune mutazioni casuali nel corredo genetico di un individuo inducono l'insorgere di nuove caratteristiche. L'analogia fra il processo naturale ed il metodo di ottimizzazione si basa sulle seguenti corrispondenze: agli individui corrispondono le soluzioni del problema; ai cromosomi corrispondono le codifiche delle soluzioni del problema; alla *popolazione* di una certa specie corrisponde un insieme di soluzioni; all'accoppiamento fra gli individui corrisponde un'operazione detta *crossover*; alla *mutazione* casuale del corredo genetico corrisponde una operazione che modifica le soluzioni (indicata con lo stesso nome); alla selezione naturale corrisponde un'operazione di riproduzione probabilistica delle soluzioni migliori, detta appunto *riproduzione*.

In questo metodo ad ogni iterazione una popolazione di soluzioni viene sottoposta in sequenza ai seguenti operatori:

- la riproduzione, che viene effettuata rimpiazzando completamente o parzialmente la popolazione corrente con nuove soluzioni estratte casualmente con probabilità proporzionale al valore della *funzione di adattamento*, che esprime la "bontà" di un individuo in funzione del valore della sua funzione obiettivo oppure del suo ranking (cioè della posizione che occupa in una classifica dell'intera popolazione ordinata secondo il valore della funzione obiettivo);
- il crossover, che per un numero prefissato di volte, date due o più soluzioni casualmente selezionate fra la popolazione corrente, le rimpiazza sostituendole con altrettante soluzioni ottenute scambiando secondo qualche regola stocastica porzioni di cromosoma;
- la mutazione, che per un numero prefissato di volte, data una soluzione casualmente selezionata fra la popolazione corrente, la sostituisce con un'altra soluzione casualmente scelta appartenente all'intorno singolo della soluzione data.

Sono state proposte numerose varianti dei Genetic Algorithms. Ad esempio è possibile conservare di generazione in generazione le migliori soluzioni, oppure suddividere la popolazione in più sottopopolazioni che si sviluppano contemporaneamente, prevedendo periodici scambi di materiale genetico fra queste sottopopolazioni.

# Riferimenti bibliografici


1 AA.VV. (1992). *Probability and Algorithms*. National Academy Press, Washington DC.

2 AA.VV. (2001). *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press.

3 Akcelik R. (1988). The Highway Capacity Manual delay formula for signalized intersections. *ITE Journal*, pp. 23-27.

4 Allsop, R.E. (1971). SIGSET: A computer program for calculating traffic capacity of signal-controlled road junctions. *Traffic Engineering & Control* 12, pp. 58-60.

5 Allsop R.E. (1974). Some possibilities for using traffic control to influence trip destinations and route choice. *Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory*. Buckley ed., Amsterdam, Elsevier, pp. 345-374.

6 Allsop, R.E. (1976). SIGCAP: A computer program for assessing the traffic capacity of signal-controlled road junctions. *Traffic Engineering & Control* 17, pp. 338-341.

7 Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York.

8 Bhat C. (1997). Recent methodological advances relevant to activity and travel behaviour analysis. *Preprint 8th IATBR*, Austin, Texas.

9 Beckman M., McGuire C.B., Winsten C.B. (1956). *Studies in the economics of transportation*. Yale University Press, New Haven, Connecticut.

10 Ben Akiva M., Francois B. (1983). $\mu$ Homogeneus Generalized Estreme Value Model. *Working paper*, Department of Civil Engineering, MIT Cambridge, Massachusetts.

11 Ben Akiva M., Lerman S. (1985). *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

12 Ben Akiva M., Cyna M., de Palma A. (1984). Dynamic model of peak period congestion. *Transportation Research* 18B, pp. 339-355.

13 Bellman R. (1958). On a routing problem. *Quarterly Applied Mathematics*, 16, pp. 87-90.

14 Benedetto G., Spagnolo R. (1977). Traffic noise survey of Turin, Italy. *Applied Acoustic*, 10, 201.

15 Bertsimas D., Tsitsiklis J. (1992). Simulated Annealing. *Probability and Algorithms*, National Academy Press, pp. 17-29.

16 Bifulco G.N. (1993). A stochastic user equilibrium assignment model for the evaluation of parking policies. *European Journal of Operational Research* 71, pp. 269-287.

17 Billheimer J.W., Gray P. (1973). Network Design with Fixed and Variable Cost Elements. *Transportation Science* 7, pp. 49-74.

18 Bureau of Public Roads (1964). *Traffic Assignment Manual*. U.S. Dept. of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C.

19 Burgess M.A. (1977). Noise prediction for urban traffic conditions. Related to measurements in the Sydney metropolitan area. *Applied Acoustic*, 10, 1.

20 Cantarella G.E. (1997). A General Fixed-Point Approach to Multi-Mode Multi-User Equilibrium Assignment with Elastic Demand. *Transportation Science*, vol. 31 (2), pp. 107-128.

21 Cantarella G.E., Cascetta E. (1995). Dynamic Processes and Equilibrium in Transportation Networks: Towards a Unifying Theory. *Transportation Science*, Vol. 29 No. 4, pp. 305-329.

22 Cantarella G.E., Improta G. (1988). Capacity Factor and Cycle Time Optimization for Signalized Junctions: A Graph Theory Approach. *Transportation Research* 22B, pp. 1-23.

23 Cantarella G. E., Pavone G.,Vitetta A. (2002). Heuristics for the Network Design Problem. *Proceedings of the 9th Meeting of the EURO Working Group on Transportation*. Local Organising Committee, Bari, pp. 408-413.

24 Cantarella G.E., Vitetta A. (1994). A multicriteria analysis for urban network design and parking location. *Preprints of conference Tristan II*, Capri, Italy, pp. 945-955.

25 Cascetta E. (1998). *Teoria e metodi dell'ingegneria dei sistemi di trasporto*. UTET, Torino, Italia.

26 Cascetta E. (2001). *Transportation systems engineering: theory and methods.* Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands.

27 Cascetta E., Gallo M., Montella B. (1998a). An asymmetric SUE model for the combined assignment-control problem. *Proceeding of WCTR '98*, Antwerp, 12-17 Luglio 1998.

28 Cascetta E., Gallo M., Montella B. (1998b), Optimal signal setting on traffic networks with stochastic equilibrium assignment. *Proceedings of TRISTAN III*, Puerto Rico, 17-23 Giugno 1998.

29 Cascetta, E., Gallo, M., Montella, B. (2004). Models and Algorithms for the Optimization of Signal Settings on Urban Networks with Stochastic Assignment Models. Accettato per la pubblicazione su *Annals of Operation Research*.

30 Cascetta E., Nuzzolo A., Russo F., Vitetta A. (1996). A modified logit route choice model overcoming path overlapping problems, specification and some calibration results for interurban networks. *Proceedings of the 13$^{th}$ International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Jean-Baptiste Lesort ed., Pergamon.

31 Cerny V. (1985). A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications* 45, pp. 41-51.

32 Chen M., Alfa A.S. (1991). A Network Design Algorithm Using a Stochastic Incremental Traffic Assignment Approach. *Transportation Science* 25(3), pp. 215-224.

33 Clark C.E. (1961). The greatest of a finite set of random variables. *Operations Research* 9, pp. 145-162.

34 Clegg J., Smith M.J. (2001). Cone projection versus half-space projection for the bilevel optimisation of transportation networks. *Transportation Research*, Part B No. 35, pp. 71-82.

35 Cook S. (1971). The complexity of theorem-proving procedures. *Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* pp. 151-158.

36 Dafermos S.C. (1980). Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. *Transportation Science* 14, pp. 42-54.

37 Daganzo C.F. (1979). *Multinomial Probit: the theory and its application to demand forecasting*. Academic Press, New York.

38 Daganzo C.F. (1982). Unconstrained extremal formulation of some transportation equilibrium problems. *Transportation Science*, 16, pp. 332-360.

39 Daganzo C.F. (1983). Stochastic network equilibrium with multiple vehicle types and asymmetric, indefinite link cost Jacobians. *Transportation Science* 17, pp. 282-300.

40 Daganzo C.F., Kusnic M. (1992). Another look at the nested logit model. *Technical Report UCB-ITS-RTR 92-2*. Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley.

41 Daganzo C.F., Sheffi Y. (1977). On stochastic models of traffic assignment. *Transportation Science*, N. 11(3), pp. 253-274.

42 Davis G.A. (1994). Exact local solution of the continuous network design problem via stochastic user equilibrium assignment. *Transportation Research*, Part B Vol. 28, No. 1, pp.61-75.

43 de Luca M. (2000). *Manuale di Pianificazione dei Trasporti*. Franco Angeli, Milano.

44 Dial R.B. (1971). A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration. *Transportation Research*, No. 5, pp. 83 111.

45 Dijkstra E.W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerishe Matematik*, 1, pp. 269-271.

46 Domencich T.A., McFadden D. (1975). *Urban travel demand: a behavioural analysis*. American Elsevier, New York.

47 Drezner Z., Wesolowsky G.O. (2003). Network design: selection and design of links and facility location. *Transportation Research* A37, pp. 241-256.

48 Fedele V. (2004). *Analisi delle scelte degli utenti di un sistema di trasporto con modelli comportamentali: rappresentazione dell'incertezza dell'utilità; simulazione dell'insieme di scelta*. Tesi di dottorato. Università Mediterranea di Reggio Calabria.

49 Festa D.C., Nuzzolo A. (1989). Analisi sperimentale delle relazioni velocità-flusso per le strade urbane. *Le Strade*, No. 1226, pp. 459-464.

50 Fisk C. (1980). Some developments in equilibrium traffic assignment. *Transportation Research*, 14B, pp. 243-255.

51 Florian M., Spiess H. (1982). The convergence of diagonalization algorithms for asymmetric network equilibrium problems. Transportation Research 16B, pp. 477-483.

52 Friesz T.L., Shah S. (2001). An overview of nontraditional formulations of static and dynamic equilibrium network design. *Transportation Research,* Part B No. 35, pp. 5-21.

53 Gallo G. (1980). Reoptimization procedures in shortest path problems. *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali*, 3, pp. 3-13.

54 Garey M., Johnson D. (1979). *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, New York.

55 Gartner N.H. (1976). Area traffic control and network equilibrium. *Traffic Equilibrium Methods, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 118, M. Florian, ed., Springer-Verlag, Berlino, pp. 274-297.

56 Gartner N., Messer C.J., Rathi A.K. (1992). *Traffic Flow Theory: A State of the Art Report*. U.S. Department of Transportation, Transportation Research Board.

57 Glover F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers and Operations Research* 13, pp. 533-549.

58 Glover F., Laguna M. (1997). *Tabu Search*. Kluwer Academic Publisers. Boston.

59 Goldberg D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley.

60 Holland J.H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial System.* The University of Michigan Press.

61 Horowitz J.L (1982). *Air quality analysis for urban transportation planning*. MIT Press, Cambridge, Mass.

62 Improta G., Cantarella G.E,. 1984. Control systems design for an individual signalised junction. *Transportation Research* 18B, pp. 147-167.

63 LeBlanc L.J., Boyce D.E. (1986). A bilevel programming algorithm for exact solution of the network design problem with user-optimal flows. *Transportation Research*, Vol. 20B, No. 3, pp. 57-77.

64 LeBlanc L.J., Morlok E.K., Pierskalla W.P. (1975). An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem. *Transportation Research*, Vol. 9, pp. 309-318.

65 Johnson E.L. (1972). On shortest paths and sorting. *Proc. 25$^{th}$ ACM Annual Conference*, pp. 510-517.

66 Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science* n. 220, pp. 671-680.

67 Kleinrock L. (1975). *Queuing System*, vol. I e II, Wiley, New York.

68 Knuth D.E. (1976). Big omicron and big omega and big theta. *SIGACT News*, vol. 8, No. 2, pp. 18-24.

69 Manski C. (1977). The structure of random utility models. *Theory and Decision*, 8, pp. 229-254.

70 Marcotte P. (1983). Network Optimization with Continuous Control Parameters. *Transportation Science*, vol. 17, No.2, pp. 181-197.

71 McFadden D. (1978). Modeling the choice of residential location. *Spatial interaction theory and residential location*, pp. 75-96. North-Holland. Amsterdam.

72 Meneguzzer C. (1995). An equilibrium route choice model with explicit treatment of the effect of intersections. Transportation Research 29B, pp. 329-356.

73 Meng Q., Yang H., Bell M.G.H. (2001). An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem. *Transportation Research*, Part B No. 35, pp. 83-105.

74 Mitchell M. (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. The MIT Press.

75 Moore G.E. (1965). Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, vol. 38, No. 8, pp. 114-117.

76 Newell G.F. (1980). *Traffic flows in transportation networks*. MIT Press, Cambridge, Mass.

77 Nguyen S., Pallottino S. (1986). Assegnazione dei passeggeri ad un sistema di linee urbane: determinazione degli ipercammini minimi. *Ricerca Operativa*, No. 32, pp. 207-230.

78 Nuzzolo A., Russo F. (1997). *Modelli per l'analisi e la simulazione dei sistemi di trasporto collettivo*. Franco Angeli, Milano.

79 Nuzzolo A., Russo F., Crisalli U. (2002). *Transit Network Modelling. The schedule-based dynamic approach*. Franco Angeli, Milano.

80 Ortuzar J. de, Willumsen L.G. (1994). *Modelling Transport*. John Wiley and Sons, New York.

81 Osborne M.J., Rubinstein A. (1994). *A Course in Game Theory*. MIT Press, Cambridge, Mass.

82 Pallottino S., Scutellà M.G. (1998). Shortest path algorithms in transportation models: classical and innovative aspects. *Equilibrium and Advanced Transportation Modelling*. Kluwer, pp. 245-281.

83 Pallottino S., Scutellà M.G. (2001). A new algorithm for reoptimizing shortest paths when the arc costs change. *Technical report TR-01-11*, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa.

84 Pape U. (1974). Implementation and efficiency of Moore-algorithms for the shortest route problem. *Mathematical programming*, 7, pp. 212-222.

85 Papola A. (2000). Some developments on the cross-nested logit model. *Proceedings of the IX IATBR conference,* Gold Coast, Queensland, Australia.

86 Pavone G., Vitetta A. (2005). Progetto della regolazione semaforica con modello di assegnazione SUE-C-Logit. Accettato per la pubblicazione sugli *Atti del convegno su Metodi e Tecnologie dell'Ingegneria dei Trasporti 2003*. Franco Angeli, Milano.

87 Pirlot M. (1996). General local search methods. *European Journal of Operational Research* 92, pp. 493-511.

88 Poorzahedy H., Turnquist M.A. (1982). Approximate Algorithms for the Discrete Network Design Problem. *Transportation Research*, Vol. 16B, No. 1, pp.45-55.

89 Post K., Tomlin J., Pitt D., Carruthers N., Maunder A., Kent J. H., Bilger R.W. (1981). Fuel Economy and Emissions Research Annual Report. *Charles Kolling Research Laboratory Technical Note ER36*, University of Sidney.

90 Potts R.B., Oliver R.M. (1972). *Flows in transportation networks.* Academic Press, New York.

91 Powell W.B. (1983). A stochastic passenger loading model of airline schedule performance. *Transportation Research*, Vol. 17B, No. 5, pp. 399-410.

92 Powell W.B., Sheffi Y. (1982). The convergence of equilibrium algorithms with predetermined step sizes. *Transportation Science* 16(1), pp. 45-55.

93 Russo F., Vitetta A. (2002). *La ricerca di percorsi in una rete di trasporto: algoritmi di minimo costo ed estensioni*. Quaderno scientifico, Dipartimento di Informatica, Matematica, Elettronica e Trasporti, Università "Mediterranea" di Reggio Calabria.

94 Russo F., Vitetta A. (2004). Metodi per l'analisi dei sistemi di trasporto in condizioni di emergenza. *Evacuazione dei sistemi urbani: metodi quantitativi per l'analisi di un sistema di trasporto in condizioni di emergenza* (a cura di F. Russo). Franco Angeli, Milano.

95 Sheffi Y. (1985). *Urban transportation networks*. Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J.

96 Sheffi Y., Powell W.B. (1981). A comparison of stochastic and deterministic traffic assignment over congested network. *Transportation Research* 15B(1), pp. 53-64.

97 Sheffi Y., Powell W.B. (1982). An algorithm for the equilibrium assignment problem with random link times. *Networks*, No. 12, pp. 191-207.

98 Sheffi Y., Powell W.B. (1983). Optimal signal setting over transportation networks. *Transportation Engineering*, 109(6), pp. 824-839.

99 Smith. M.J. (1979). The existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibrium. *Transportation Research* 13B, pp. 295-304.

100 Spiess H., Florian M. (1989). Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transportation Research*, vol. 32B (2), pp. 82-102.

101 Suwansirikul C., Friesz T.L., Tobin R.L. (1987). Equilibrium decomposed optimization: a heuristic for the continuous equilibrium network design problem. *Transportation Science*, vol. 21, pp. 254-263.

102 Tan H.N., Gershwin S.B. (1979). Hybrid Optimization: Control of Traffic Networks in Equilibrium. *LIDS Technical Report*, MIT, Cambridge.

103 Tan H.N., Gershwin S.B., Athans M. (1979). Hybrid Optimization in Urban Traffic Networks. LIDS Technical Report, MIT, Cambridge.

104 Tarjan R.E. (1983). *Data structures and network algorithms*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania.

105 Train K. (2003). *Discrete Choice Methods with Simulation.* Cambridge University Press.

106 Transportation Research Board (2000). *Highway Capacity Manual*. National Research Council. Washington D.C.

107 Turing A.M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2, 42 (1936-37), pp. 230-265.

108 Van Vliet D. (1981). Selected node-pair analysis in Dial's assignment algorithm. *Transportation Research* B No. 15, pp. 65-68.

109 Vitetta A., Pavone G. (2004). Euristiche per il problema di progetto delle reti di trasporto stradale urbano. *Atti del convegno su Metodi e Tecnologie dell'Ingegneria dei Trasporti 2002*. Franco Angeli, Milano, pp. 676-702.

110 von Neumann J., Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. John Wiley and Sons, New York.

111 Wardrop J.G. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part II, Vol. 1, pp. 325-378.

112 Webster F.W. (1958). Traffic Signal Settings. *Road Research Technical Paper* 39, Road Research Laboratory, HMSO, London.

113 Webster F.W., Cobbe B.M. (1966). Traffic Signals. *Road Research Technical Paper* 56, Road Research Laboratory, HMSO, London.

114 Williams H.C.W.L. (1977). On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit. *Environment and Planning* 9A, pp. 285-344.

115 Yagiura M., Ibaraki T. (2001). On Metaheuristic Algorithms for Combinatorial Optimization Problems. *Systems and Computers in Japan* 32(3), pp. 33-55.

116 Yagiura M., Ibaraki T. (2002). Local Search. *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press, pp. 104-123.

# Indice analitico


**Algoritmo**
_ esatto; 138; 142
_ euristico; 143
**Algoritmo di assegnazione; 29**
_ con enumerazione esplicita dei percorsi; 32
_ con enumerazione implicita dei percorsi; 32
_ delle Medie Successive; 40
_ di carico deterministico della rete (DNL); 32
_ di carico stocastico della rete (SNL); 35
_ di diagonalizzazione; 40
_ di Dial; 36
_ di equilibrio deterministico degli utenti (DUE); 39
_ di equilibrio stocastico degli utenti (SUE); 40
_ di Frank-Wolfe; 39
_ Probit - Monte Carlo; 35
_ Tutto o Niente; 33
**Algoritmo di progetto**
_ per la regolazione semaforica; 75
_ per la topologia e la regolazione semaforica; 84
**Algoritmo per la ricerca dei minimi percorsi; 29**
**Analisi multicriteria; 54; 55**
**Arco; 3**
**Area di studio; 2; 51**
**Assegnazione (modello); 18**
_ ad orario; 18
_ deterministica di ottimo di sistema (DSO); 20; 26
_ di carico deterministico della rete (DNL); 19; 20
_ di carico stocastico della rete (SNL); 19; 22
_ di equilibrio deterministico degli utenti (DUE); 19; 24
_ di equilibrio stocastico degli utenti (SUE); 20; 25
_ di ottimo di sistema; 20
_ di ottimo di utente; 19
_ dinamica interperiodale; 19
_ dinamica intraperiodale; 19
_ mono-classe; 18
_ multi-classe; 18
_ stocastica di ottimo di sistema (SSO); 20; 27
**Attributi (modello di domanda); 8; 9**
**Calibrazione (modello di domanda); 9**
**Centroide; 2**
**Complessità asintotica; 139**
**Congestione; 3; 5; 18**
**Costo**
_ di arco; 4
_ di percorso; 4
**Disequazione variazionale; 24**
**Distribuzione (modello); 13**
**Domanda; 2**
_ elastica; 15; 18
_ rigida; 14; 18
modello di _; 7
modello di _ deterministico; 9
modello di _ probabilistico; 9
modello di _ quattro stadi; 13
**Emissione (modello); 13**
**Esternalità; 6; 47**
**Flusso**
_ di arco; 4
_ di percorso; 4
_ di saturazione; 78
**Frontiera di Pareto; 55**
**Funzione**
_ di carico stocastico della rete; 22
_ di costo; 5; 46
_ di costo BPR; 6
_ di impatto; 6; 47
_ di prestazione; 6; 47

**Genetic Algorithms; 92; 114; 146**
Cromosoma; 93; 147
Crossover; 93; 147
Funzione di adattamento; 92; 147
Mutazione; 93; 147
Popolazione; 92; 147
Riproduzione; 92; 147
**GEV (Generalized Extreme Value); 11**
**Gioco**
_ di Nash; 41
_ di Stackelberg; 41
**Grafo; 3**
**Hill Climbing; 88; 112; 145**
_ con intorno doppio; 98; 116
**Insieme di ammissibilità**
_ dei flussi di arco; 21
_ dei flussi di percorso; 21
**Insieme di scelta; 8**
**Interazione domanda-offerta; 2**
**Intorno; 144**
_ doppio; 86
_ intermedio; 87
_ singolo; 86
**Logit**
_ Gerarchizzato a più livelli; 11
_ Gerarchizzato ad un livello; 11
_ Multinomiale; 10; 17; 36
C-Logit; 17
Cross Nested _; 11
**Mappa di carico deterministico della rete; 22**
**Matrice**
_ dei flussi congiunti; 80
_ delle probabilità congiunte; 75; 80
_ delle probabilità di scelta del percorso; 16
_ di assegnazione; 23
_ di incidenza archi percorsi; 5
_ origine-destinazione; 14
**Metaeuristica; 143**
_ ibrida; 86
_ semplice; 86
**Metodo ibrido 1; 94; 115**
**Metodo ibrido 2; 95; 116**
**Minimi percorsi; 29**
albero dei _; 30
algoritmi per la ricerca dei _; 29
riottimizzazione dei _; 32
**Modello di progetto**
_ per la regolazione semaforica; 65
_ per la topologia e la regolazione semaforica; 69
formulazione generale del _; 53
**Mossa; 144**
**Nodo; 3**
**Obiettivo (modello di progetto); 43; 46**
_ degli utenti del sistema di trasporto; 46; 54
_ dei gestori del sistema di trasporto; 46; 47; 55
_ della collettività; 46; 47; 55
_ elementare; 54
**Offerta; 2**
modello di _; 3
**Parametri (modello di domanda); 9**
**Percorso; 4**
_ doppiamente efficiente; 36
_ efficiente rispetto all'origine; 36
_ efficiente rispetto alla destinazione; 36
**Peso (algoritmi di Dial e Van Vliet)**
_ della coppia di nodi; 80
_ di arco; 37
_ di nodo; 37
**Pianificazione dei sistemi di trasporto; 51**
scala spaziale; 51
scala temporale; 51; 52
stadio di avanzamento; 51; 52
**Principio di Wardrop**
primo _; 21
secondo _; 26
**Probit; 11; 17; 35**
**Problema**
_ intrattabile; 140
_ trattabile; 139
**Random Walk; 123**
**Residuo aleatorio; 8**
**Rete; 3**
_ diacronica; 18
**Scelta del percorso**
_ completamente preventiva; 18
_ preventiva-adattiva; 18
modello di _; 13
modello di _ deterministico; 19
modello di _ probabilistico; 19
**Scelta modale (modello); 13**
**Sequenza; 69**
**Simulated Annealing; 89; 112; 145**
Criterio di Metropolis; 89; 146
Plateau; 89; 146
Temperatura; 89; 145; 146
**Sistema di trasporto; 1; 2**
**Soddisfazione; 9; 10**
**Spazio di ricerca; 144**
**Tabu Search; 90; 113; 146**
Criterio di aspirazione; 91; 146
Tabu list; 91; 146

**Tempo di verde efficace; 66**
**Teoria dei giochi; 41**
**Utilità**
_ percepita; 8
_ sistematica; 8
teoria dell'_ aleatoria; 7
**Valore attuale netto; 52**
**Variabile decisionale (modello di progetto); 43**
_ continua; 45
_ discreta; 45
_ relativa ai prezzi; 45
_ relativa ai sistemi di trasporto collettivo; 45
_ relativa ai sistemi di trasporto individuale; 45
_ relativa alla topologia della rete; 45
_ relativa alle prestazioni; 45
**Vincolo (modello di progetto); 43; 48**
_ comportamentale; 50
_ esterno; 48; 49; 56
_ tecnico; 48; 56
_comportamentale; 48; 55
**What if; 41**
**What to; 41**
**Zona di traffico; 2**

# Indice delle figure

Fig. 1.1 – Esempio di identificazione dell'area di studio e suddivisione in zone di traffico ..... 3
Fig. 1.2 – Esempio di rete e di matrice di incidenza archi-percorsi ..... 5
Fig. 1.3 – Modello di domanda a quattro stadi [26] ..... 14
Fig. 1.4 - Esempio di matrice origine-destinazione e del corrispondente vettore di domanda ..... 15
Fig. 1.5 – Esempio di matrice delle probabilità di scelta del percorso ..... 16
Fig. 1.6 – Classificazione dei modelli di assegnazione ..... 20
Fig. 1.7 – Esempio di calcolo dei flussi di arco (assegnazione SNL) ..... 23
Fig. 1.8 – Esempio di albero dei minimi percorsi in avanti ..... 30
Fig. 1.9 – Schema dell'algoritmo di carico deterministico della rete sequenziale in avanti ..... 34
Fig. 1.10 – Schema dell'algoritmo di carico deterministico della rete simultaneo in avanti ..... 34
Fig. 1.11 – Schema dell'algoritmo di carico stocastico della rete Probit - Monte Carlo ..... 36
Fig. 1.12 – Schema dell'algoritmo di carico stocastico della rete di Dial ..... 38
Fig. 1.13 – Schema dell'algoritmo di Frank-Wolfe ..... 39
Fig. 1.14 – Schema dell'Algoritmo delle Medie Successive (MSA-FA) ..... 40
Fig. 2.1 – Approccio "what if" ..... 42
Fig. 2.2 – Approccio "what to" ..... 42
Fig. 2.3 – Schema della classificazione del processo di pianificazione ..... 53
Fig. 2.4 – Schema della formulazione generale del modello di progetto (cfr. Fig. 2.2) ..... 56
Fig. 3.1 – Esempio di vettore dei tempi di verde efficace e dei vincoli tecnici associati a tali variabili ..... 67
Fig. 3.2 – Numero di possibili configurazioni topologiche al variare del numero di sequenze in progetto ..... 71
Fig. 3.3 – Esempi di codifica delle configurazioni topologiche di una sequenza ..... 72
Fig. 4.1 - Struttura generale dell'algoritmo di progetto della regolazione semaforica ..... 76
Fig. 4.2 – Esempio di rete utilizzato per il calcolo dei termini della matrice delle probabilità congiunte ..... 81
Fig. 4.3 – Rappresentazione semplice (a) ed esplosa (b) di due intersezioni contigue ..... 82
Fig. 4.4 – Rappresentazione semplice (a) ed esplosa (b) di due intersezioni ravvicinate ..... 82
Fig. 4.5 - Struttura generale dell'algoritmo di progetto congiunto della topologia e della regolazione semaforica ..... 85
Fig. 4.6 – Numero degli elementi contenuti negli intorni singolo e doppio ..... 87
Fig. 4.7 – Classificazione degli algoritmi utilizzati nella fase di progetto della topologia ..... 88
Fig. 4.8 – Diagramma di flusso dell'Hill Climbing (HC) ..... 89
Fig. 4.9 – Diagramma di flusso del Simulated Annealing (SA) ..... 90

Fig. 4.10 – Diagramma di flusso del Tabu Search (TS) ..... 92
Fig. 4.11 – Diagramma di flusso dei Genetic Algorithms (GA) ..... 94
Fig. 4.12 – Diagramma di flusso del metodo ibrido 1: TS→GA (a) e GA→TS (b) ..... 95
Fig. 4.13 – Diagramma di flusso del metodo ibrido 2 (TS+PR) ..... 97
Fig. 4.14 – Diagramma di flusso dell'Hill Climbing con intorno doppio (HC2) ..... 98
Fig. 5.1 – Risultati dell'applicazione dell'algoritmo proposto ad una rete test ..... 104
Fig. 5.2 – Andamento della funzione obiettivo per la traiettoria che parte dal punto C ..... 105
Fig. 5.3 – Andamento delle variabili decisionali per la traiettoria che parte dal punto C ..... 105
Fig. 5.4 – Andamento della funzione obiettivo per la traiettoria che parte dal punto D ..... 106
Fig. 5.5 – Andamento delle variabili decisionali per la traiettoria che parte dal punto D ..... 106
Fig. 5.6 – Andamento della funzione obiettivo per la traiettoria che parte dal punto E ..... 107
Fig. 5.7 – Andamento delle variabili decisionali per la traiettoria che parte dal punto E ..... 107
Fig. 5.8 – Area di studio e area di progetto del sistema di trasporto di Villa San Giovanni ..... 111
Fig. 5.9 – Area di studio e area di progetto del sistema di trasporto di Barcellona P. di G. ..... 111
Fig. 5.10 – Range di decremento della funzione obiettivo al variare dei parametri utilizzati (Villa San Giovanni) ..... 118
Fig. 5.11 – Range di decremento della funzione obiettivo al variare dei parametri utilizzati (Barcellona Pozzo di Gotto) ..... 118
Fig. 5.12 – Area di studio e area di progetto del sistema di trasporto di Melito Porto Salvo ..... 120
Fig. 5.13 – Grafo della rete di trasporto di Melito Porto Salvo ..... 121
Fig. 5.14 – Sequenze di progetto individuate nel sistema trasporto di Melito Porto Salvo ..... 122
Fig. 5.15 – Confronto fra i risulati ottenuti al variare dell'algoritmo utilizzato ..... 124
Fig. 5.16 – Confronto delle velocità di convergenza al variare dell'algoritmo utilizzato ..... 125
Fig. 5.17 – Analisi multicriteria delle soluzioni ottenute ..... 126
Fig. 5.18 – Analisi multicriteria delle soluzioni ottenute (valori baricentrici) ..... 126
Fig. 5.19 – Analisi multicriteria delle soluzioni ottenute (frontiera di Pareto) ..... 127
Fig. 5.20 – Confronto fra l'intorno singolo e l'intorno doppio (Hill Climbing) ..... 127
Fig. 5.21 - Esempi di interventi di riduzione della capacità stradale ..... 128
Fig. 5.22 – Configurazione proposta 1P (Piano Urbano del Traffico) ..... 129
Fig. 5.23 – Configurazione proposta 2P (Piano Urbano del Traffico) ..... 129
Fig. 5.24 – Confronto fra la soluzione del Piano (PUT – 2P) e quelle ottenute con i metodi proposti ..... 130
Fig. 5.25 – Configurazione individuata con i metodi di progetto "what to" proposti ..... 131

# Indice delle tabelle

Tab. 2.1 – Classificazione delle variabili decisionali ..... 46
Tab. 2.2 – Classificazione degli obiettivi ..... 48
Tab. 2.3 – Classificazione dei vincoli ..... 51
Tab. 5.1 – Caratteristiche dei sistemi di trasporto di Villa San Giovanni e Barcellona P. di G. .... 111
Tab. 5.2 – Risultati delle elaborazioni: Hill Climbing (HC) ..... 112
Tab. 5.3 – Risultati delle elaborazioni: Simulated Annealing (SA) ..... 113
Tab. 5.4 – Risultati delle elaborazioni: Tabu Search (TS) ..... 113
Tab. 5.5 – Risultati delle elaborazioni: Genetic Algorithms (GA) ..... 115
Tab. 5.6 – Risultati delle elaborazioni: metodo ibrido 1 (TS+GA) ..... 116
Tab. 5.7 – Risultati delle elaborazioni: metodo ibrido 2 (TS+PR) ..... 116
Tab. 5.8 – Risultati delle elaborazioni: Hill Climbing con intorno doppio (HC2) ..... 117
Tab. 5.9 – Caratteristiche del sistema di trasporto di Melito Porto Salvo ..... 120
Tab. 5.10 – Matrice origine-destinazione del sistema di trasporto di Melito Porto Salvo ..... 121

# Notazione

Le convenzioni utilizzate in questa trattazione per la notazione sono le seguenti:

- gli scalari (variabili deterministiche o aleatorie e parametri) sono indicati con lettere minuscole;
- gli insiemi e le strutture dati sono indicati con lettere maiuscole;
- i vettori sono indicati con lettere minuscole in grassetto;
- le matrici sono indicate con lettere maiuscole in grassetto.

Le corrispondenti funzioni sono indicate in corsivo, cioè:

- le funzioni scalari sono indicate con lettere minuscole corsive;
- le funzioni che restituiscono insiemi sono indicate con lettere maiuscole corsive;
- le funzioni vettoriali sono indicate con lettere minuscole corsive in grassetto;
- le funzioni matriciali sono indicate con lettere maiuscole corsive in grassetto.

Le grandezze associate ad una generica iterazione i di un qualsiasi algoritmo sono indicate con l'apice $^{(i)}$.

Nel seguito è fornito un elenco dei simboli più importanti e frequentemente utilizzati nel testo. La simbologia utilizzata nell'appendice è indipendente dal resto della trattazione e non è riportata nel successivo elenco.

Le corrispondenti funzioni di molte entità non sono indicate nel seguito, ed è da intendersi che ciascuna di queste entità se indicata in corsivo rappresenta la funzione che restituisce l'entità stessa.

| | |
|---|---|
| $att[\bullet]$ | valore atteso di una variabile aleatoria |
| $\mathbf{b}$ | vettore dei costi di investimento e/o gestione |
| $b_{lim}$ | budget disponibile (limite superiore del totale dei costi di investimento e/o gestione) |
| $BS(\bullet)$ | funzione che restituisce l'insieme degli archi appartenenti alla stella in ingresso di un dato nodo |
| $c_l$ | costo di arco relativo all'arco l, talvolta indicato con $c_{(n', n'')}$ |
| $c_l(\bullet)$ | funzione di costo dell'arco l |
| $\mathbf{c}$ | vettore dei costi di arco |
| $\boldsymbol{c}(\bullet)$ | funzioni di costo |
| $\mathbf{c}_{DUE}$ | vettore dei costi di arco in condizioni di equilibrio deterministico |
| $\mathbf{c}_{SUE}$ | vettore dei costi di arco in condizioni di equilibrio stocastico |

| | |
|---|---|
| $c_{0,l}$ | costo dell'arco l a flusso nullo |
| $c_{A,l}$ | capacità dell'arco l |
| $c_{F,k}$ | fattore di sovrapposizione del percorso k (modello C-Logit) |
| $c_{S,l}$ | flusso di saturazione dell'arco l |
| $c_{r\to n}$ | costo per raggiungere il nodo n dall'origine r (nell'albero dei percorsi considerato) |
| $c_{n\to s}$ | costo per raggiungere dal nodo n la destinazione s (nell'albero dei percorsi considerato) |
| $cdf(\bullet)$ | funzione di distribuzione di probabilità dei residui aleatori |
| $cov[\bullet, \bullet]$ | covarianza di due variabili aleatorie |
| $d_{rs}$ | domanda relativa alla coppia origine-destinazione rs |
| $\mathbf{d}$ | vettore dei flussi di domanda |
| $det(\bullet)$ | determinante di una matrice quadrata |
| $e_{i,l}$ | misura dell'esternalità i associata all'arco l |
| $e_{i,l}(\bullet)$ | funzione di prestazione o di impatto relativa all'esternalità i associata all'arco l |
| $\mathbf{E}$ | matrice delle esternalità |
| E | insieme di ammissibilità dei vincoli esterni |
| $f_l$ | flusso di arco relativo all'arco l |
| $\mathbf{f}$ | vettore dei flussi di arco |
| $\mathbf{f}_{DNL}$ | vettore dei flussi di arco con assegnazione di carico deterministico della rete |
| $\boldsymbol{f}_{DNL}(\bullet)$ | mappa di carico determinisico della rete |
| $\mathbf{f}_{SNL}$ | vettore dei flussi di arco con assegnazione di carico stocastico della rete |
| $\boldsymbol{f}_{SNL}(\bullet)$ | funzione di carico stocastico della rete |
| $f_{SNL,l}(\bullet)$ | termine della funzione di carico stocastico della rete che restituisce il flusso dell'arco l |
| $\mathbf{f}_{DUE}$ | vettore dei flussi di arco con assegnazione di equilibrio deterministico degli utenti |
| $\mathbf{f}_{SUE}$ | vettore dei flussi di arco con assegnazione di equilibrio stocastico degli utenti |
| $\mathbf{f}_{DSO}$ | vettore dei flussi di arco con assegnazione deterministica di ottimo di sistema |
| $\mathbf{f}_{SSO}$ | vettore dei flussi di arco con assegnazione stocastica di ottimo di sistema |
| $\mathbf{f}^*$ | vettore dei flussi di arco ottenuto con un qualsiasi modello di assegnazione |
| $\hat{\mathbf{F}}_{rs}$ | matrice dei flussi congiunti relativa alla coppia origine-destinazione r-s |
| $\hat{\mathbf{F}}$ | matrice dei flussi congiunti complessiva |
| $f_{l\to l'}$ | somma dei flussi di percorso che attraversano prima l'arco l e poi l'arco l′ |
| $g_k$ | costo di percorso relativo al percorso k |

| | |
|---|---|
| $g_{0,l}$ | costo a flusso nullo del percorso k (cioè quando è nullo il flusso su tutti gli archi che compongono il percorso) |
| $g_{0,k\text{-}k'}$ | costo a flusso nullo del tratto in comune fra i percorsi k e k' (cioè quando è nullo il flusso su tutti gli archi in comune fra i due percorsi) |
| $\mathbf{g}$ | vettore dei costi di percorso |
| $\mathbf{g}^{ADD}$ | vettore dei costi di percorso non additivi |
| $\mathbf{g}^{NA}$ | vettore dei costi di percorso additivi |
| $\mathbf{g}_{rs}$ | vettore dei costi dei percorsi relativi alla coppia origine-destinazione rs |
| G | grafo (rappresentazione topologica del sistema di offerta) |
| $h_k$ | flusso di percorso relativo al percorso k |
| $\mathbf{h}$ | vettore dei flussi di percorso |
| $\mathbf{h}_{rs}$ | vettore dei flussi dei percorsi relativi alla coppia origine-destinazione rs |
| $\mathbf{I}$ | matrice identità |
| $I_S(\bullet)$ | funzione che restituisce l'intorno singolo di un vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze |
| $I_D(\bullet)$ | funzione che restituisce l'intorno doppio di un vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze |
| $H^i$ | insieme di scelta del decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\boldsymbol{Hess}[\bullet]$ | matrice Hessiana |
| $J_n$ | insieme delle fasi relative all'intersezione associata al nodo n |
| $\boldsymbol{Jac}[\bullet]$ | matrice Jacobiana |
| k | percorso |
| K | insieme dei percorsi |
| $K_{rs}$ | insieme dei percorsi relativi alla coppia origine-destinazione rs |
| l | arco, talvolta indicato con la coppia di nodi iniziale e finale (n', n'') |
| L | insieme degli archi |
| $L_1$ | insieme delle sequenze di progetto con una corsia di marcia |
| $L_2$ | insieme delle sequenze di progetto con almeno due corsia di marcia |
| $\mathbf{M}$ | matrice di assegnazione |
| $m_{rs,l}$ | probabilità di attraversare l'arco l data la coppia origine-destinazione rs |
| $m_{rs,l\rightarrow l'}$ | probabilità di attraversare prima l'arco l e poi l'arco l′ data la coppia origine-destinazione rs |
| $\hat{\mathbf{M}}_{rs}$ | matrice delle probabilità congiunte relativa alla coppia origine-destinazione rs |
| $max(\bullet)$ | valore massimo di un vettore o di un insieme |
| n | nodo |
| N | insieme dei nodi |
| $N_C$ | insieme dei nodi la cui regolazione semaforica deve essere progettata |
| $p^i[\, j \mid H^i]$ | probabilità il decisore i scelga l'alternativa j dato l'insieme di scelta $H^i$ (l'indice i è talvolta omesso) |

| | |
|---|---|
| $p_{rs,k}$ | probabilità di scegliere il percorso k data la coppia origine-destinazione rs |
| $\mathbf{P}$ | matrice delle probabilità di scelta del percorso |
| $\mathbf{p}_{rs}$ | vettore delle probabilità di scelta del percorso per la coppia origine-destinazione rs |
| $q_S$ | motivo dello spostamento |
| $q_H$ | fascia oraria dello spostamento |
| $q_M$ | modo con cui viene effettuato lo spostamento |
| $pdf(\bullet)$ | funzione di densità di probabilità dei residui aleatori |
| $pr[\bullet]$ | probabilità che si verifichi un dato evento |
| $pr[(n', n'') \mid n'']$ | probabilità di scegliere l'arco (n', n'') condizionata all'attraversamento del nodo finale n'' |
| $proj_{\otimes}[\bullet]$ | proiezione di un vettore $\bullet$ sull'insieme $\otimes$ |
| r | centroide origine dello spostamento |
| R | insieme dei centroidi origine |
| rs | coppia origine-destinazione |
| RS | insieme delle coppie origine-destinazione |
| s | centroide destinazione dello spostamento |
| S | insieme dei centroidi destinazione |
| $S_f$ | insieme di ammissibilità dei flussi di arco |
| $S_h$ | insieme di ammissibilità dei flussi di percorso |
| $S_y$ | insieme di ammissibilità delle variabili decisionali |
| T | insieme di ammissibilità dei vincoli tecnici |
| $t_n$ | tempo di ciclo dell'intersezione associata al nodo n |
| $t'_n$ | somma dei perditempo per l'intersezione associata al nodo n |
| $T_r$ | albero dei percorsi in avanti dall'origine r |
| $T_r$* | albero dei minimi percorsi in avanti dall'origine r |
| $T_s$* | albero dei minimi percorsi in indietro dalla destinazione s |
| $u^i_j$ | utilità percepita dell'alternativa j per il decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\mathbf{u}^i$ | vettore delle utilità percepite del decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $v^i_j$ | utilità sistematica dell'alternativa j per il decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\mathbf{v}^i$ | vettore delle utilità sistematiche del decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\mathbf{v}_{rs}$ | vettore delle utilità sistematiche associate ai percorsi della coppia origine-destinazione rs |
| $var[\bullet]$ | varianza di una variabile aleatoria |
| $w(\bullet)$ | funzione obiettivo (modello di progetto) |
| w | valore della funzione obiettivo (modello di progetto) |

| | |
|---|---|
| $w_0$ | valore della funzione obiettivo relativa alla configurazione dello stato di fatto |
| $w^*$ | miglior valore della funzione obiettivo otenuto durante l'esecuzione di un algoritmo di progetto |
| $\mathbf{w}$ | vettore degli obiettivi elementari |
| $\hat{w}_{(n', n'')}$ | peso dell'arco (n', n'') (algoritmo di Dial) |
| $\hat{W}_n$ | peso del nodo n (algoritmo di Dial) |
| $\hat{W}_{n',n''}$ | peso della coppia di nodi n′-n″ (algoritmo di Van Vliet) |
| $\mathbf{x}^i_j$ | vettore degli attributi dell'alternativa j per il decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $X_{SE}$ | insieme delle variabili socioeconomiche (attributi dei modelli di domanda) |
| $X_T$ | insieme variabili relative al livello di servizio (attributi dei modelli di domanda) |
| $\mathbf{y}$ | vettore delle variabili decisionali |
| $\mathbf{y}^*$ | vettore delle variabili decisionali ottime |
| $\mathbf{y}_0$ | vettore delle variabili decisionali nella configurazione iniziale |
| $y_{C,i}$ | tempo di verde efficace associato alla generica fase i (variabile decisionale) |
| $y_{C,\{l\}}$ | tempo di verde efficace associato all'arco l |
| $\mathbf{y}_C$ | vettore dei tempi di verde efficace |
| $\mathbf{y}_C^*$ | vettore dei tempi di verde efficace ottimi |
| $\mathbf{y}_{C,0}$ | vettore dei tempi di verde efficace nella configurazione iniziale |
| $\bar{y}_{C,min}$ | tempo di verde efficace minimo |
| $y_{T,i}$ | configurazione topologica della generica sequenza i (variabile decisionale) |
| $\mathbf{y}_T$ | vettore delle configurazioni topologiche delle sequenze |
| $\mathbf{y}_T^*$ | vettore delle configurazioni topologiche ottime delle sequenze |
| $z^i$ | soddisfazione per il decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\alpha_r$ | parametro di selettività (Genetic Algorithms) |
| $\alpha_c$ | tasso di raffreddamento (Simulated Annealing) |
| $\boldsymbol{\beta}$ | vettore dei coefficienti dell'utilità sistematica |
| $\boldsymbol{\gamma}$ | vettore dei coefficienti degli obiettivi elementari |
| $\delta_{lk}$ | elemento della matrice di incidenza archi-percorsi relativo all'arco l ed al percorso k |
| $\boldsymbol{\Delta}$ | matrice di incidenza archi-percorsi |
| $\Delta w^{\%}$ | decremento percentuale della funzione obiettivo durante l'esecuzione di un algoritmo di progetto |
| $\Delta w^{+}$ | scarto percentuale della funzione obiettivo rispetto al valore dell'ottimo globale |

| | |
|---|---|
| $\Delta\rho^{\%}$ | percentuale di sequenze variate rispetto allo stato di fatto |
| $\boldsymbol{\eta}$ | vettore dei residui aleatori di arco |
| $\varepsilon^{i}_{j}$ | residuo aleatorio dell'alternativa j per il decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\boldsymbol{\varepsilon}^{i}$ | vettore dei residui aleatori del decisore i (l'indice i è talvolta omesso) |
| $\varphi(\bullet)$ | generica funzione scalare |
| $\boldsymbol{\varphi}(\bullet)$ | generica funzione vettoriale |
| $\varphi_c$ | frequenza del crossover (Genetic Algorithms) |
| $\varphi_m$ | frequenza della mutazione (Genetic Algorithms) |
| $\lambda_l$ | dimensione della tabu list (Tabu Search) |
| $\lambda_{l'}$ | numero di iterazioni durante le quali permangono nella tabu list le configurazioni inserite durante la modifica (metodo ibrido 2) |
| $\lambda_p$ | lunghezza del plateau (Simulated Annealing) |
| $\mu$ | passo di spostamento lungo la direzione di ricerca (algoritmo del gradiente) |
| $\nu_p$ | cardinalità della popolazione (Genetic Algorithms) |
| $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ | matrice di varianza-covarianza dei residui aleatori |
| $\tau_{l,i}$ | termine di incidenza fra l'arco l e la fase i |
| $\tau_0$ | temperatura iniziale (Simulated Annealing) |
| $\tau_f$ | temperatura finale (Simulated Annealing) |
| $\tau_{\%}$ | frazione di soluzioni esplorate col Tabu Search (metodo ibrido 1) |
| $\omega$ | parametro che controlla le condizioni di arresto negli algoritmi |
| $\xi$ | costante di proporzionalità del modello Probit applicato alla scelta del percorso |
| $\vartheta$ | parametro associato alla varianza del modello Logit |
| $\mathbf{1}$ | vettore unitario |
| $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{y}_C}(\bullet)$ | funzione vettoriale che restituisce il gradiente approssimato (algoritmo proposto per il progetto della regolazione semaforica) |
| $\lvert\bullet\rvert$ | cardinalità di un insieme |